

26ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2022 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta

Respostas sem justificativa não serão consideradas

1) Thiago, Tadeu e Thomás são amigos. Num certo dia, os três amigos saíram para jantar em um restaurante badalado da cidade. Ao pagar a conta do restaurante Thiago pagou R\$ 7,00 a menos que Tadeu e R\$ 8,00 a mais que Thomás. A conta total ficou em R\$ 185,00. Thiago ao pagar sua parte deu uma nota de R\$ 100,00 e decidiu dar 10% do seu troco para o garçom. Determine qual o valor que o garçom recebeu.

Resolução: seja x o valor pago por Thiago. Então o valor pago por cada um é:

- Thiago: x
- Tadeu: $x + 7$
- Thomás: $x - 8$

Logo,

$$x + x + 7 + x - 8 = 185$$

$$3x = 186 \quad \rightarrow \quad x = 62$$

O troco de Thiago foi:

$$100 - 62 = R\$ 38,00$$

Como a gorjeta do garçom foi 10% do troco, o valor que ele recebeu foi **R\$ 3,80**.

2) Em um edifício com apartamentos somente nos andares de 1º ao 4º, moram 4 meninas, em andares distintos: Joana, Yara, Kelly e Bete, não necessariamente nessa ordem. Cada uma delas tem um animal de estimação diferente: gato, cachorro, passarinho e tartaruga, não necessariamente nessa ordem. Bete vive reclamando do barulho feito pelo cachorro, no andar imediatamente acima do seu. Joana, que não mora no 4º, mora um andar acima do de Kelly, que tem o passarinho e não mora no 2º andar. Quem mora no 3º andar tem uma tartaruga. Sendo assim a ordem de moradia das meninas e o animal de estimação de cada uma delas são:

Resolução:

1º) Montar a tabela

MENINAS / ANIMAIS DE ESTIMAÇÃO

4 - Joana, Yara, Kelly e Bete/gato, cachorro, passarinho e tartaruga

3- Joana, Yara, Kelly e Bete/gato, cachorro, passarinho e tartaruga

2- Joana, Yara, Kelly e Bete/gato, cachorro, passarinho e tartaruga

1- Joana, Yara, Kelly e Bete/gato, cachorro, passarinho e tartaruga

2º) Bete vive reclamando do barulho feito pelo cachorro, no andar imediatamente acima do seu. Logo, Bete não pode estar no 4º andar e o cachorro não estará no 1º andar. Apaga da tabela.

4 - Joana, Yara, Kelly/gato, cachorro, passarinho e tartaruga

3- Joana, Yara, Kelly e Bete/gato, cachorro, passarinho e tartaruga

2- Joana, Yara, Kelly e Bete/gato, cachorro, passarinho e tartaruga

1- Joana, Yara, Kelly e Bete/gato, passarinho e tartaruga



26ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2022 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta

Respostas sem justificativa não serão consideradas

3º) Joana, que não mora no 4º, mora um andar acima do de Kelly, que tem o passarinho e não mora no 2º andar. Joana não mora no 4º andar e também não mora no 1º, visto que mora acima de Kelly, que por sua vez não mora no 2º andar ou no 4º pois Joana ocupa o lugar acima. Apaga os correspondentes na tabela. E como Kelly possui o passarinho apaga onde não aparece a Kelly na tabela.

4 - Yara/gato, cachorro e tartaruga

3- Joana, Yara, Kelly e Bete/gato, cachorro, passarinho e tartaruga

2- Joana, Yara Bete/gato, cachorro e tartaruga

1- Yara, Kelly e Bete/gato, passarinho e tartaruga

3º) Quem mora no 3º andar tem uma tartaruga. Apaga a tartaruga da tabela e deixa somente no 3 andar.

4 - Yara/gato, cachorro

3- Joana, Yara, Kelly e Bete/ tartaruga

2- Joana, Yara Bete/gato, cachorro

1- Yara, Kelly e Bete/gato, passarinho

4º) Retoma as informações anteriores: Bete vive reclamando do barulho feito pelo cachorro, no andar imediatamente acima do seu; Joana, que não mora no 4º, mora um andar acima do de Kelly, que tem o passarinho e não mora no 2º andar. Então, comece por Kelly que tem o passarinho e a única possibilidade é o 1º andar, portanto, Joana mora no 2º andar; Bete vive reclamando do barulho feito pelo cachorro, no andar imediatamente acima do seu, logo mora no 3º andar e Yara tem um cachorro. Restando apenas o gato para Joana.

4 - Yara/cachorro

3- Bete/ tartaruga

2- Joana/gato

1- Kelly/passarinho

3) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R\$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R\$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?



26ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2022 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta

Respostas sem justificativa não serão consideradas

Resolução:

Como faltavam R\$ 510,00, que deveriam ser pagos com R\$ 7,00 a mais para as 50 pessoas iniciais, mais o valor da cota total para as 5 novas pessoas, temos:

$$(7 \times 50) + 5x = 510 \quad \rightarrow \quad x = 32$$

Logo, o valor da cota calculada para cada um é **R\$ 32,00**.

4) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *****@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado. De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

Resolução:

Como as letras “edu” devem aparecer juntas, teremos 5 caracteres a serem considerados (edu, a, r, d, o).

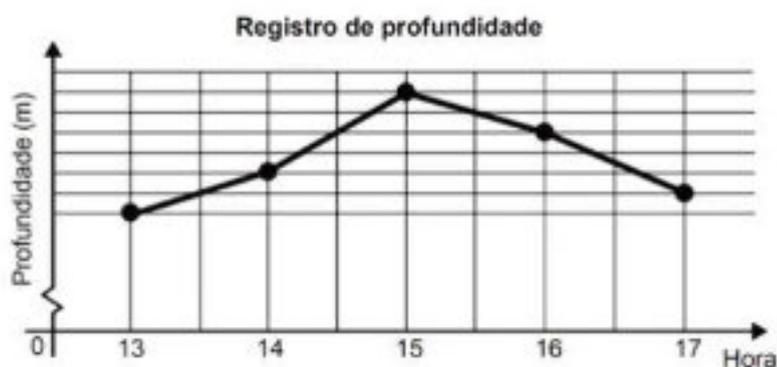
A quantidade de maneiras é a permutação dos caracteres acima, ou seja:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Como Eduardo é um dos anagramas e não pode ser utilizado, a quantidade de maneiras é:

$$120 - 1 = \mathbf{119 \text{ maneiras.}}$$

5) Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h , registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h , cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.



26ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2022 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta

Respostas sem justificativa não serão consideradas

Foi informado que entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%. Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

Resolução:

Com base no gráfico, observamos que a profundidade máxima ocorre às 15h com $(h + 6m)$. Às 16 horas, a profundidade do rio diminuiu 10%, ou seja, tornou-se 90% da profundidade registrada às 15h, $0,9 \times (h + 6m)$ e, podemos dizer que esse valor corresponde a $(h + 4m)$, comparando-se com a profundidade inicial h .

Portanto, os dados são relacionados da seguinte forma:

$$h + 4 = 0,9 \times (h + 6) \quad \rightarrow \quad h + 4 = 0,9h + 5,4$$

$$0,1h = 1,4 \quad \rightarrow \quad h = 14$$

Como descobrimos a profundidade inicial, podemos calcular a profundidade às 16h. Sendo assim, às 16 horas a profundidade do rio é $(h + 4) = 18$ metros.

6) Um determinado triângulo retângulo possui uma hipotenusa que mede 13 cm e seus catetos possuem dimensões desconhecidas, digamos que essas medidas podem ser chamadas de x e y . Descubra a área da região determinada por esse triângulo sabendo que seu perímetro é de 30 cm e que $x < y$.

Resolução:

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$13^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 169$$

Pela definição de perímetro, podemos afirmar que:

$$x + y + 13 = 30 \quad \rightarrow \quad x + y = 17$$

Podemos então montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

Aplicando o método da substituição, podemos isolar a variável x na segunda equação e substituir na primeira equação:

$$x^2 + y^2 = 169 \quad \rightarrow \quad (17 - y)^2 + y^2 = 169$$

$$2y^2 - 34y + 120 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 17y + 60 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau encontramos as soluções $y = 5$ ou $y = 12$.

Então, se $y = 5$,

$$x = 17 - y \quad \rightarrow \quad x = 12$$

E, se $y = 12$,

$$x = 17 - y \quad \rightarrow \quad x = 5$$



26ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2022 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

Como $x < y$, então $x = 5$ e $y = 12$.

Por ser um triângulo retângulo, a área será:

$$\text{Área} = \frac{5 \times 12}{2} = 30\text{cm}^2.$$

7) Uma questão ambiental relevante, na atualidade, remete ao acúmulo e ao descarte de resíduos sólidos. A indústria nuclear é responsável pelo armazenamento e controle dos rejeitos que produz. Suponha que uma indústria nuclear armazene seus resíduos em recipientes cilíndricos, cuja altura é igual a 4 m e o diâmetro da base igual a 12 m. Contudo, devido a mudanças operacionais, decide-se alterar a altura e o raio destes recipientes cilíndricos de tal maneira que o novo recipiente: tenha volume igual a 62,5% do volume do recipiente anterior; e possua raio da base igual à metade do raio da base do recipiente anterior. Desta forma, a altura do novo recipiente cilíndrico deve ser, em metros, igual a:

Resolução:

Vamos calcular o volume do cilindro atualmente utilizado:

$$V = \pi r^2 \times h \quad \rightarrow \quad V = \pi \times 6^2 \times 4 \quad \rightarrow \quad V = 144\pi$$

Como o volume do cilindro novo será 62,5% do volume do cilindro atual, temos:

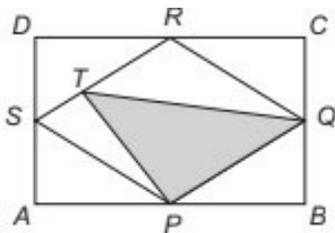
$$V_{\text{novo}} = 0,625 \times 144\pi \quad \rightarrow \quad V_{\text{novo}} = 90\pi$$

Com o raio do novo cilindro sendo 3cm, a altura deverá ser:

$$90\pi = \pi \times 3^2 \times h \quad \rightarrow \quad h = \frac{90\pi}{9\pi} \quad \rightarrow \quad h = 10$$

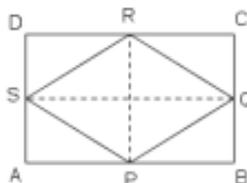
Portanto, a altura do novo cilindro deverá ser **10cm**.

8) Na figura o retângulo ABCD tem área 40 cm². Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do retângulo e T está no segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



Resolução:

A figura abaixo mostra a decomposição do retângulo ABCD em oito triângulos congruentes.

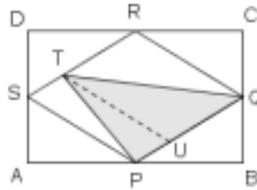


26ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2022 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

Logo, concluímos que a área do quadrilátero $PQRS$ é metade da área do retângulo, ou seja, 20cm^2 .

Agora vamos traçar uma paralela TU ao segmento PS , conforme figura abaixo:



Os triângulos PST e UTP são congruentes, assim como os triângulos UTQ e RQT . Como o triângulo PQT é a união dos triângulos UTP e UTQ , a sua área é a metade do quadrilátero $PQRS$, ou seja, 10cm^2 .

9) Asdrúbal tem 210 cartões numerados de 1 a 210.

a) Quantos desses cartões são múltiplos de 3?

b) Quantos desses cartões tem um número par que não é múltiplo de 3?

c) Qual é o menor número de cartões que Asdrúbal deve pegar, ao acaso, para ter certeza de que 2 ou 3 seja divisor comum dos números escritos em pelo menos dois dos cartões selecionados?

Resolução:

a) Como 210 é divisível por 3, o número de cartões é o resultado da divisão $\frac{210}{3}$, que é igual a **70 cartões**.

b) Os cartões pares são $\frac{210}{2} = 105$. Porém, devemos excluir os pares múltiplos de 3, ou seja, os cartões múltiplos de 6.

Logo, os cartões múltiplos de 6 são $\frac{210}{6} = 35$.

Então, os cartões pares que não são múltiplos de 3 são $105 - 35 = 70$ cartões.

c) Pelas resoluções dos itens a) e b), concluímos que:

- Temos 70 cartões pares que não são múltiplos de 3.
- Temos 35 cartões pares e múltiplos de 3 (múltiplos de 6).
- Temos 35 cartões múltiplos de 3 que não são pares (70-35).

Logo, restam $210 - 70 - 35 - 35 = 70$ cartões que não são pares e nem múltiplos de 3.

Portanto, ao acaso, Asdrúbal pode pegar os 70 cartões que não são pares e nem múltiplos de 3, mais 1 cartão par que não é múltiplo de 3, e mais 1 cartão múltiplo de 3 que não é par. Dessa maneira, o próximo cartão a ser retirado garantirá a condição proposta.

Então, o menor número de cartões para ter certeza é:

$$70 + 1 + 1 + 1 = 73 \text{ cartões.}$$

