24ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2019 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

01) Duas urnas A e B contêm bolas vermelhas e bolas pretas, e somente essas. O número de bolas vermelhas na urna A é o dobro do número de bolas vermelhas na urna B, e o número de bolas pretas na urna B é o dobro do número de bolas pretas na urna A. O total de bolas é 21, sendo que o número de bolas vermelhas na urna B é 2. Determine o número de bolas na urna A.

Resolução:

Sejam:

$V = \text{ bola vermelha}$
$P = \text{ bola preta}$
$Urna\ A = 2V + P$
$Urna\ B = V + 2P$
$V = 2$

$$(2V + P) + (V + 2P) = 21 \quad \rightarrow \quad 3V + 3P = 21 \quad \rightarrow \quad 3 \times 2 + 3P = 21$$

$$3P = 21 - 6 \quad \rightarrow \quad P = 5$$

Logo,

$$Urna\ A = 2V + P = 2 \times 2 + 5 = \mathbf{9\ bolas}.$$

02) Isaura tem o dobro da idade de Juraci, que é um ano mais velha que Benedita. Sabendo que daqui a dois anos a soma das idades de Isaura, Juraci e Benedita será igual a 77 anos, qual a idade de Benedita daqui a 8 anos?

Resolução:

Seja x a idade de Benedita.

	Hoje	2 anos
Benedita	x	x+2
Juraci	x+1	x+1+2
Isaura	2(x+1)	2(x+1)+2

$$(x + 2) + (x + 1 + 2) + [2 \times (x + 1) + 2] = 77$$

$$4x + 9 = 77 \quad \rightarrow \quad x = 17$$

Então, a idade de Benedita daqui 8 anos será $17 + 8 = \mathbf{25\ anos}$.

03) Um rei tinha que decidir, entre os muitos pretendentes ao casamento com sua filha, o qual receberia sua aprovação. Desconfiado de que os pretendentes estavam interessados apenas no dote da princesa, decidiu que se casaria com sua filha quem mostrasse também inteligência. Colocou o dote em um dos três cofres, com as inscrições abaixo, e avisou que apenas um dos rótulos dizia a verdade, os outros eram falsos.

OLIMPÍADA ESTUDANTIL
ASTRA DE MATEMÁTICA
25ª EDIÇÃO

Cofre A: “O tesouro está neste cofre”.

Cofre B: “O tesouro não está neste cofre”.

Cofre C: “O tesouro não está no cofre A”.

Determine qual cofre dizia a verdade e onde está o tesouro (dote). Justifique seus argumentos!

Resolução:

Se Cofre A é verdade, B tem que ser verdade. Então, Cofre A é mentira.

Se Cofre B é verdade, A é mentira e C é verdade. Então, Cofre B é mentira.

Logo, Cofre C é verdade. Como B é mentira, **o tesouro está no Cofre B.**

04) Um número de dois algarismos é tal que o algarismo das unidades excede de 2 o das dezenas. Se invertermos os algarismos e somarmos o resultado ao primeiro número, obtemos 110. Determine o número inicial.

Resolução:

Sejam x o algarismo da dezena e $x+2$ o algarismo da unidade. A soma do número com o seu inverso será:

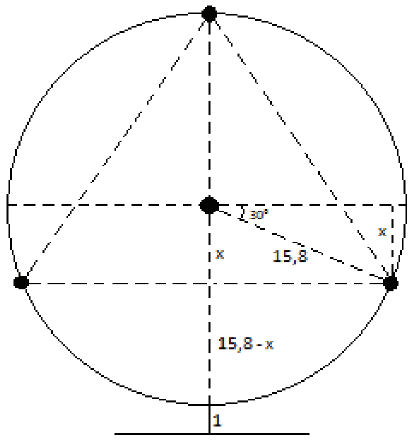
$$(10x + x + 2) + [10(x + 2) + x] = 110$$

$$22x + 22 = 110 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Então, o número inicial é **46.**

05) O ponto mais baixo de uma roda gigante circular de raio 15,8 metros dista 1 metro do solo. A roda está girando com três crianças que estão, duas a duas, à mesma distância. Determine a altura de duas delas, no momento em que a outra está no ponto mais alto.

Resolução:



$$sen30° = \frac{x}{15,8} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{15,8} \quad \rightarrow \quad x = 7,9$$

Como a roda gigante dista 1 metro do solo, a altura de duas delas é $(15,8 - 7,9) + 1 = \mathbf{8,9}\boldsymbol{m}$.

06) Considere todos os números de 3 algarismos distintos, escolhidos entre os elementos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}. Em quantos desses números a soma dos algarismos é ímpar?

Resolução:

Para a soma ser ímpar, o número deve ter 1 ou 3 algarismos ímpares. Portanto, a quantidade N de números de 3 algarismos formados pelos subconjuntos abaixo é:

$$\{1,2,4\} = 3! = 6$$

$$\{2,3,4\} = 3! = 6$$

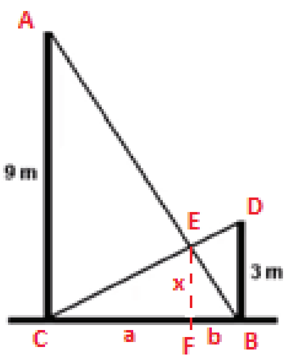
$$\{2,4,5\} = 3! = 6$$

$$\{1,3,5\} = 3! = 6$$

$$N = 6 + 6 + 6 + 6 = \mathbf{24.}$$

07) Após um tremor de terra, dois muros paralelos em uma rua da cidade ficaram ligeiramente abalados. Os moradores se reuniram e decidiram escorar os muros utilizando duas barras metálicas, como mostra a figura abaixo. Sabendo que os muros têm alturas de 9m e 3m, respectivamente, a que altura do nível do chão as duas barras se interceptam? Despreze a espessura das barras.

Resolução:



Seja E o ponto de encontro das duas barras e o segmento $\overline{EF}$ paralelo à $\overline{DB}$ e $\overline{AC}$ Por semelhanças de triângulos obtém-se:

$$\frac{3}{a+b}=\frac{x}{a} \quad \rightarrow \quad 3a=x(a+b)$$

$$\frac{9}{a+b}=\frac{x}{b} \quad \rightarrow \quad 9b=x(a+b)$$

Logo,

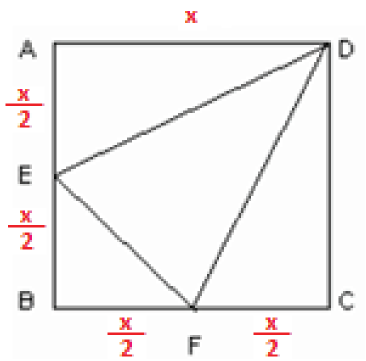
$$3a=9b \quad \rightarrow \quad a=3b$$

e

$$9b=x(3b+b) \quad \rightarrow \quad x=\frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=2,25m.}$$

08) Na figura, E e F são pontos médios dos lados AB e BC do quadrado ABCD. Qual a porcentagem da área do quadrado ocupada pelo triângulo DEF?

Resolução:



$$A_{DEF}=A_{ABCD}-A_{ADE}-A_{EBF}-A_{DFC}$$

$$A_{ABCD}=x^2$$

$$A_{ADE}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right).x}{2}=\frac{x^2}{4}$$

$$A_{EBF}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right).\left(\frac{x}{2}\right)}{2}=\frac{x^2}{8}$$

$$A_{DFC}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right).x}{2}=\frac{x^2}{4}$$

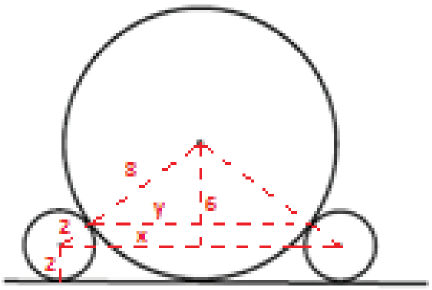
Então,

$$A_{DEF}=x^2-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{4} \quad \rightarrow \quad A_{DEF}=x^2-\frac{5x^2}{8}=\frac{3x^2}{8}$$

$$\frac{A_{DEF}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{3x^2}{8}}{x^2} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = \mathbf{37{,}5\%}.$$

09) Três goiabas perfeitamente esféricas de centros C1, C2 e C3, e raios 2cm, 8cm e 2cm, respectivamente, estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura. Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?

Resolução:



Pelo Teorema de Pitágoras tem-se:

$$(8+2)^2 = 6^2 + x^2 \qquad \rightarrow \qquad x = 8$$

Por semelhança de triângulos,

$$\frac{10}{8} = \frac{8}{y} \qquad \rightarrow \qquad y = 6{,}4$$

Logo, a distância D a ser percorrida será:

$$D = 2 + 6{,}4 + 6{,}4 + 2 = \mathbf{16{,}8\ cm}.$$

10) Sejam a e b respectivamente a soma dos algarismos da representação decimal dos números $M = 2^{2005} \cdot 5^{2007}$ e $N = 2^{2001} \cdot 5^{2005}$. Qual o valor de $a + b$?

Resolução:

$$M = 2^{2005} \times 5^{2007} = 2^{2005} \times 5^{2005} \times 5^2 = (2 \times 5)^{2005} \times 25 = 10000\ldots \times 25 = 250000\ldots$$

$$N = 2^{2001} \times 5^{2005} = 2^{2001} \times 5^{2001} \times 5^4 = (2 \times 5)^{2001} \times 625 = 10000\ldots \times 625 = 625000\ldots$$

Logo,

$$a = 2 + 5 = 7 \qquad e \qquad b = 6 + 2 + 5 = 13$$

$$a + b = 7 + 13 = \mathbf{20}.$$