

23ª EDIÇÃO

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL

DE MATEMÁTICA

GABARITO

23ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2018 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

01) A média aritmética de 100 números é igual a 40,19. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos 99 números restantes passará a ser 40,5. Qual o número retirado?

Resolução:

$$\begin{aligned}\frac{S_{100}}{100} &= 40,19 \quad \rightarrow \quad S_{100} = 4019 \\ \frac{S_{100} - x}{99} &= 40,5 \quad \rightarrow \quad 4019 - x = 4009,5 \\ x &= 9,5\end{aligned}$$

Portanto, o número retirado é 9,5.

02) De uma caixa contendo bolas brancas e pretas, retiraram-se 15 brancas, ficando a relação de 1 branca para 2 pretas. Em seguida, retiraram-se 10 pretas, restando na caixa, bolas na razão de 4 brancas para 3 pretas. Determine quantas bolas havia, inicialmente, na caixa.

Resolução:

$$\begin{aligned}b &= \text{bolas brancas} \\ p &= \text{bolas pretas} \\ \frac{b - 15}{p} &= \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad p = 2b - 30 \\ \frac{b - 15}{p - 10} &= \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad 3b = 4p + 5 \\ 3b &= 4 \times (2b - 30) + 5 \quad \rightarrow \quad b = 23 \\ p &= 2 \times 23 - 30 \quad \rightarrow \quad p = 16\end{aligned}$$

Logo, havia inicialmente na caixa 23 bolas brancas e 16 bolas pretas, totalizando 39 bolas.

03) Larissa, Nádia, Michele e Olívia têm profissões diferentes. Uma delas é Bióloga, a outra é Assistente Social, a outra é Médica e a outra é Farmacêutica, não necessariamente nessa ordem. Sabe-se que:

Larissa e Nádia conhecem a Assistente Social.

Michele e a Farmacêutica já foram ao consultório da Médica.

A Farmacêutica é irmã de Olívia e faz um curso com Larissa.

Larissa não é Bióloga e não conhece Olívia.

Descubra as profissões de cada uma delas.

Resolução:

23ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2018 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta

Respostas sem justificativa não serão consideradas

	LARISSA	NÁDIA	MICHELE	OLÍVIA
BIÓLOGA	não	não	não	sim
ASSIST. SOCIAL	não	não	sim	não
MÉDICA	sim	não	não	não
FARMACÊUTICA	não	sim	não	não

Conclui-se que Larissa é médica, Nádia é farmacêutica, Michele é assistente social e Olívia é bióloga.

04) Numa lanchonete que vende cachorro-quente, são oferecidos ao freguês: pimenta, cebola, mostarda e molho de tomate como temperos adicionais. Quantos tipos de cachorros-quentes diferentes (pela adição ou não de algum tempero) podem ser vendidos?

Resolução:

- Sem tempero: 1 tipo

- Com 1 tempero: 4 tipos

- Com 2 temperos: $C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ tipos

- Com 3 temperos: $C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$ tipos

- Com 4 temperos: 1 tipo

Portanto, podem ser vendidos (1+4+6+4+1) 16 tipos de cachorros-quentes.

05) O quadrado da diferença entre o número natural x e 3 é acrescido da soma de 11 e x . O resultado é, então, dividido pelo dobro de x , obtendo-se quociente 8 e resto 20. Determine a soma dos algarismos de x .

Resolução:

$$(x - 3)^2 + 11 + x = 8 \times 2x + 20 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + 11 + x = 16x + 20$$

$$x^2 - 21x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 21$$

O resultado $x = 0$ não convém, então $x = 21$ é o número natural que procuramos. **A soma dos algarismos é $2 + 1 = 3$.**

06) Seja D o ponto médio do lado AB do triângulo ABC. Sejam E e F os pontos médios dos segmentos DB e BC, respectivamente, conforme se vê na figura. Se a área do triângulo ABC vale 96, então qual área do triângulo AEF?

23ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2018 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

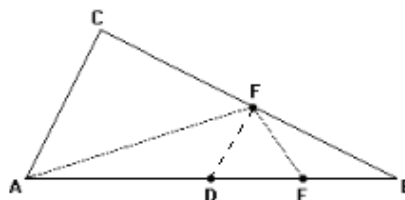
Resolução:

$$\overline{AF} \text{ é mediana, então } A_{AFB} = \frac{96}{2} = 48$$

$$\overline{FD} \text{ é mediana, então } A_{FDB} = A_{FDA} = \frac{48}{2} = 24$$

$$\overline{FE} \text{ é mediana, então } A_{FDE} = A_{FBE} = \frac{24}{2} = 12$$

$$A_{AEF} = A_{FDA} + A_{FDE} = 24 + 12 = 36$$



07) Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1,2,3,4,5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

Resolução:

$$\text{Total de maneiras: } 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Desconsiderar:

- O número 13 nas 2 primeiras casas: $5 \times 5 - 1 = 24$ (excluindo o número 1313)
- O número 13 na segunda e terceira casas: $5 \times 5 = 25$
- O número 13 nas 2 últimas casas: $5 \times 5 - 1 = 24$ (excluindo o número 1313)
- O número 1313: 1

$$\text{Portanto, a quantidade de maneiras distintas é } 625 - 24 - 25 - 24 - 1 = 551.$$

08) Em uma mesa de bilhar, coloca-se uma bola branca na posição B e uma bola vermelha na posição V, conforme o esquema abaixo. Deve-se jogar a bola branca de modo que ela siga a trajetória indicada na figura e atinja a bola vermelha. Assumindo que, em cada colisão da bola branca com uma das bordas da mesa os ângulos de incidência e de reflexão são iguais, a que distância x do vértice Q deve-se jogar a bola branca?

Resolução:

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

$$\frac{x}{y} = \frac{0,4}{0,8 - y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{0,8x}{x + 0,4}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1,20 - x}{0,9} \rightarrow 0,9x = (1,20 - x) \times y$$

$$0,9x = \frac{0,8x}{x + 0,4} \times (1,20 - x) \quad \rightarrow \quad 0,9x^2 + 0,36x = 0,96x - 0,8x^2$$

$$1,7x^2 - 0,6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{1,7} = \frac{6}{17}$$

The diagram shows a rectangular frame with vertices Q (top-left), R (top-right), S (bottom-right), and P (bottom-left). The total height of the frame is 1.20 m and the total width is 0.90 m. A cable is suspended from point Q to point B on the right side. The cable consists of two segments: QV and VB. Point V is located on the right side of the frame, 0.40 m from the top corner R. The horizontal distance from Q to V is 0.80 m, and the horizontal distance from V to B is 0.80 - y. The vertical distance from Q to V is x, and the vertical distance from V to B is 1.20 - x. A uniformly distributed load of 1.5 kN/m is applied horizontally to the right along the entire length of the cable QV and VB. The weight of the cable is neglected.

Resolução:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3 \times (x^2y + xy^2)$$

$$13^3 = 793 + 3N \rightarrow N = \frac{2197 - 793}{3} = 468$$

Resolução:

$$10^2 = (L - 4)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$100 = L^2 - 8L + 16 + \frac{L^2}{4} \quad \rightarrow \quad 400 = 4L^2 - 32L + 64 + L^2$$

$$5L^2 - 32L - 336 = 0 \rightarrow L = 12 \text{ ou } L = -5,6$$