22ª EDIÇÃO

OLIMPÍADA ESTUDANTIL ASTRA DE MATEMÁTICA

GABARITO

22ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2017 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

01) Em uma cidade constatou-se que as famílias que consomem arroz não consomem macarrão. Sabe-se que 40% consomem arroz, 30% consomem macarrão, 15% consomem feijão e arroz, 20% consomem feijão e macarrão e 60% consomem feijão. Determine a porcentagem das famílias que não consomem esses três produtos.

Resolução:

As famílias que consomem apenas arroz, feijão e macarrão, representados respectivamente pelas letras A, F e M são:

$$A = 40\% - 15\% = 25\%$$

$$F = 60\% - 15\% - 20\% = 25\%$$

$$M = 30\% - 20\% = 10\%$$

Seja N a porcentagem de famílias que não consomem nenhum desses produtos. Logo,

$$A + F + M + A \cap F + F \cap M + N = 100\%$$

$$25\% + 25\% + 10\% + 15\% + 20\% + N = 100\%$$

$$N = 5\%.$$

Portanto, a porcentagem das famílias que não consomem esses três produtos **é 5%**.

02) Fernando e Fernanda formam um casal estranho. Fernando conta mentiras nas quartas, quintas e sextas-feiras, e conta apenas verdades nos outros dias. Já Fernanda conta mentiras aos domingos, segundas e terças-feiras, contando verdades nos outros dias. Em certo dia, ambos falaram: “Amanhã é meu dia de mentir”. Determine em qual dia essa afirmação foi feita.

Resolução:

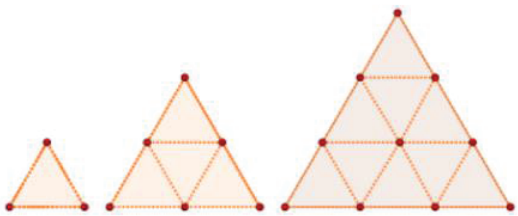
	Segunda	**Terça**	**Quarta**	**Quinta**	**Sexta**	**Sábado**	**Domingo**
Fernando	verdade	**verdade**	mentira	mentira	mentira	verdade	verdade
Fernanda	mentira	**mentira**	verdade	verdade	verdade	verdade	mentira

O único dia em que é possível constatar essa afirmação é **terça-feira**.

22ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2017 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

03) A sequência de triângulos equiláteros, ilustrados na figura abaixo, apresenta certo número de pontos assinalados em cada triângulo.



T_1 T_2 T_3

Seguindo a lógica utilizada na construção da sequência, determine o número de pontos que estarão assinalados no oitavo triângulo.

Resolução:

Tem-se o número de pontos para cada triângulo:

$T_1 = 1 + 2 = 3$

$T_2 = 1 + 2 + 3 = 6$

$T_3 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

$\vdots$

$T_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

Portanto, o número de pontos assinalados no oitavo triângulo é **45**.

04) Um saco contém 13 bolinhas amarelas, 17 cor-de-rosa e 19 roxas. Uma pessoa de olhos vendados retirará do saco n bolinhas de uma só vez. Qual o menor valor de n de forma que se possa garantir que será retirado pelo menos um par de bolinhas de cores diferentes?

Resolução:

Existe a probabilidade da pessoa retirar 19 bolinhas todas roxas. Para que seja garantido pelo menos um par de bolinhas de cores diferentes, precisará ser retirada a 20ª bolinha. Logo, o menor valor de n é **20**.

OLIMPÍADA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

05) A porcentagem de fumantes de uma cidade é 32%. Se 3 em cada 11 fumantes deixarem de fumar, o número de fumantes ficará reduzido a 12800. Calcule o número de fumantes da cidade e o número de habitantes.

Resolução:

Seja x o número de fumantes e y o número de habitantes.

$$\frac{8}{11}x = 12800 \qquad \rightarrow \qquad x = 17600$$

$$\frac{32}{100}y = 17600 \qquad \rightarrow \qquad y = 55000$$

Então, os números de fumantes e habitantes da cidade são, respectivamente, **17.600 e 55.000**.

06) Os participantes de um festival de música decidiram que, ao final do festival, fariam uma festa de encerramento em que cada um dos participantes daria uma flor de presente a cada um de seus colegas, também participantes do festival. Sabendo que o total de flores distribuídas será 420, determine o número de participantes?

Resolução:

Seja x o número de participantes do festival. Podemos representar o total de flores distribuídas pela seguinte fórmula:

$$x(x-1) = 420 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - x - 420 = 0$$

As soluções para a equação do segundo grau são:

$$x_1 = 21 \qquad e \qquad x_2 = -20$$

Como o número deve ser positivo, a única solução possível é 21. Logo, o número de participantes do festival é **21**.

22ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2017 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

07) O José tem um dia de folga após cada três dias seguidos de trabalho ou, dito de outra forma, tem um dia de folga de quatro em quatro dias. Sempre que tem folga a um domingo, o José aproveita para assistir ao jogo de futebol do seu filho, Cristiano. Sabendo que amanhã, quinta-feira, o José estará de folga, dentro de quantos dias terá assistido a dez jogos do Cristiano?

Resolução:

seg	ter	qua	qui	sex	sáb	dom
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	**25**
26	27	28	**29**			

O José conseguirá assistir pela primeira vez o jogo após 25 dias e sabendo que o ciclo de folgas se repetirá a cada 28 dias (29 - 1), ele conseguirá assistir os 10 jogos em:

$$25 + (9 \times 28) = \boldsymbol{277\ dias}$$

08) Chama-se palíndromos os números inteiros que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo: 383, 4224, 74847). Qual é o número total de palíndromos de cinco algarismos?

Resolução:

O primeiro algarismo do palíndromo não poderá ser zero, pelo fato do número ter 5 algarismos, e obrigatoriamente os 2 últimos devem ser iguais aos 2 primeiros. Logo, as possibilidades são:

$$\overline{9} \quad \overline{10} \quad \overline{10} \quad \overline{1} \quad \overline{1}$$

$$9 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 900$$

Portanto, o número total de palíndromos é **900**.

OLIMPÍADA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

22ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2017 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

09) O senhor Abílio gosta muito do número 4 e é muito supersticioso. Na loteria de São Martinho da sua cidade, onde os bilhetes são numerados de 1 a 10000, decidiu comprar todos os múltiplos de 4 que têm 4 algarismos todos distintos. Quantos bilhetes terá de comprar o senhor Abílio?

Resolução:

Sabemos que um número é divisível por 4 quando se termina em 00 ou quando os dois últimos algarismos formam um número divisível por 4.

Os bilhetes comprados pelo senhor Abílio devem ter os seguintes 2 últimos algarismos:

$$04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 92\ e\ 96$$

Se já usamos o zero, o que acontece em seis casos (04, 08, 20, 40, 60, 80), então existem 8 possibilidades para a casa dos milhares e 7 para a casa das centenas. O total de números para esses casos é:

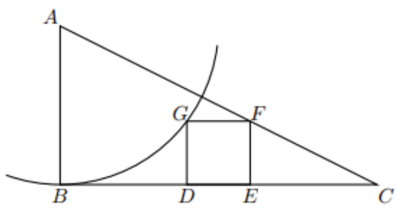
$$8 \times 7 \times 6 = 336$$

Para os casos restantes (16 casos) existem 7 possibilidades para a casa dos milhares, já que o zero não poderá ocupá-la, e na casa das centenas também terá 7 possibilidades. O total de números para esses casos é:

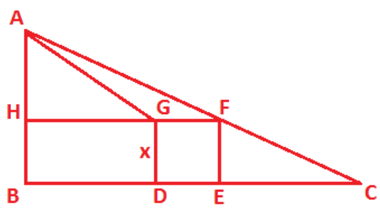
$$7 \times 7 \times 16 = 784$$

Portanto, o senhor Abílio terá de comprar $336 + 784 =$ **1120 bilhetes.**

10) Num triangulo retângulo [ABC] são conhecidas as medidas dos dois catetos, AB = 5 e BC = 10. O quadrado [DEFG] está com um dos lados em [BC] de tal modo que F pertence ao lado [AC] e G pertence à circunferência de raio 5 e centro em A. Qual é a medida do lado do quadrado [DEFG]?



Resolução:



Sejam x o lado do quadrado e H o ponto de intersecção da reta FG com o lado AB do triângulo.

OLIMPÍADA ESTUDANTIL ASTRA DE MATEMÁTICA

$$AH = 5 - x$$

Os triângulos ABC e AHF são semelhantes, portanto:

$$\frac{HF}{AH} = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{5} \qquad \rightarrow \qquad HF = 2(5 - x)$$

Temos que:

$$HG = HF - x = 2(5 - x) - x = 10 - 3x$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$(AG)^2 = (AH)^2 + (HG)^2$$

$$(5)^2 = (5 - x)^2 + (10 - 3x)^2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 2 \quad ou \quad x = 5$$

O lado do x do quadrado não pode ser igual a 5 pois é a medida de AB, logo $\boldsymbol{x = 2}$.