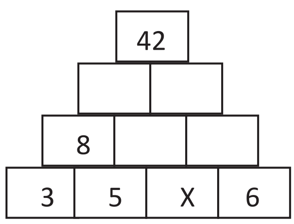
OLIMPÍADA ESTUDANTIL ASTRA DE MATEMÁTICA

PRIMEIRA FASE

1) No final do primeiro semestre deste ano, 40 acadêmicos participaram de uma pesquisa que objetivou analisar a frequência com que estes utilizaram o atendimento extraclasse do professor e/ou do monitor de uma determinada disciplina. Obteve-se o seguinte resultado: 20% dos acadêmicos procuraram atendimento tanto do professor quanto do monitor; 30% dos acadêmicos procuraram somente o atendimento do monitor; 15% dos acadêmicos não opinaram e 4 acadêmicos não procuraram atendimento do professor nem do monitor. Então o número de acadêmicos que procurou o atendimento somente do professor é igual a:

(a) 8 (b) 10 (c) 18 (d) 20 (e) 24

2) Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casa. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas em branco, obtém-se o 42 na casa indicada. Qual é o valor de x?

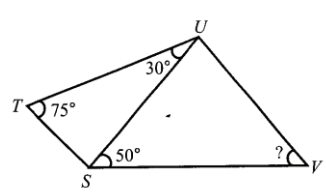


(a) 6 (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) ½

3) Numa sequência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores. Se o segundo termo é 1 e o quinto termo é 2005, qual é o sexto termo?

(a) 3002 (b) 3008 (c) 4002 (d) 5004 (e) 6005

4) Na figura dada, TU = SV. Quanto vale o ângulo SVU, em graus?



(a) 30° (b) 50° (c) 55° (d) 65° (e) 70°

5) A roda de uma bicicleta tem 90 cm de diâmetro. Então, a distância percorrida por um ciclista nessa bicicleta em movimento, quando a roda dá 2.000 voltas completas sem deslizar:

Considere $\pi = 3,14$.

(a) é inferior a 3 quilômetros. (b) está entre 3 e 4 quilômetros. (c) está entre 4 e 5 quilômetros.
(d) está entre 5 e 6 quilômetros. (e) é superior a 6 quilômetros.

6) Uma lapiseira, três cadernos e uma caneta custam, juntos, 33 reais. Duas lapiseiras, sete cadernos e duas canetas custam, juntos, 76 reais. O custo de uma lapiseira, um caderno e uma caneta, juntos, em reais, é:

(a) 11. (b) 12. (c) 13. (d) 17. (e) 38.

7) Uma loja colocou o seguinte anúncio na vitrine: "O preço de qualquer camisa colorida é o dobro do preço de qualquer camisa branca." Lineu foi a essa loja e comprou 4 camisas coloridas e algumas brancas. Quando foi efetuar o pagamento, notou um acréscimo de 50% no valor da compra e, então, viu que, na nota fiscal, as camisas estavam com suas quantidades trocadas. Nessas condições, quantas camisas brancas foram compradas por Lineu?

(a) 12 (b) 13 (c) 15 (d) 16 (e) 18

8) Em agosto de 2015, Zuza gastou R$ 192,00 na compra de algumas peças de certo artigo. No mês seguinte, o preço unitário desse artigo aumentou R$ 8,00 e, com a mesma quantia que gastou em agosto, ele pode comprar duas peças a menos. Em setembro, o preço de cada peça de tal artigo era:

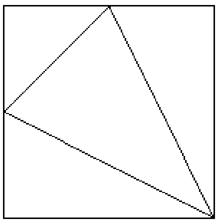
(a) R$ 24,00 (b) R$ 25,00 (c) R$ 28,00 (d) R$ 30,00 (e) R$ 32,00

9) Para fazer um modelo de ladrilho, certo desenhista une um dos vértices de um quadrado aos pontos médios dos lados que não contêm esse vértice, obtendo um triângulo isósceles. A razão entre a medida da área desse triângulo e a medida da área desse quadrado é igual a:

(a) 0,350 (b) 0,375

(c) 0,380 (d) 0,385

(e) 0,390

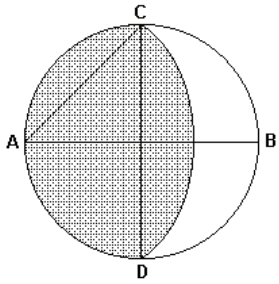


10) AB e CD são dois diâmetros perpendiculares de um círculo de raio 1dm. Calcular a área da superfície comum a esse círculo e ao círculo de centro A e raio AC. Resposta em decímetros quadrados :

(a) π + 2 (b) π - 2

(c) π + 1 (d) π - 1

(e) π



OLIMPÍADA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

11) (Dissertativa) João e Maria têm, cada um, um jarro grande com um litro de água. No primeiro dia, João coloca 1 ml da água do seu jarro no jarro da Maria. No segundo dia, Maria coloca 2 ml da água do seu jarro no jarro do João. No terceiro dia , João coloca 3 ml da água do seu jarro no jarro da Maria, e assim por diante. Depois de 200 dias, quantos mililitros de água tem no jarro de Maria?

Resolução:

No primeiro dia, Maria tem 1001
No segundo dia, Maria tem 999
No terceiro dia, Maria tem 1002
No quarto dia, Maria tem 998
No quinto dia, Maria tem 1003
No sexto dia, Maria tem 997
No sétimo dia, Maria tem 1004
No oitavo dia, Maria tem 996
No nono dia, Maria tem 1005
No décimo dia, Maria tem 995
e assim vai... ou seja, contando os dias pares (afinal, 200 é par), ela tem 1 litro - metade do número de dias...
Logo, 1000 ml - 100 ml = **900 ml**

NOME:

ESCOLA:

Assinale a alternativa correta com caneta. Questões com rasuras serão desconsideradas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A		X								
B	X		X						X	
C						X				
D				X	X		X			X
E								X		

OLIMPÍADA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

SEGUNDA FASE

01) Dez minutos antes de colocar o bolo no forno, eu coloquei meu gato do lado de fora da casa. O bolo deve ser assado por 35 minutos, então eu coloquei o despertador para tocar em 35 minutos, após colocar o bolo no forno. Imediatamente fiz um café para mim, o que me tomou 6 minutos. Três minutos antes de acabar de beber o café o gato entrou em casa. Isso foi cinco minutos antes do despertador tocar. O telefone tocou no meio do tempo entre eu acabar de fazer o café e o gato entrar em casa. Falei ao telefone por cinco minutos e desliguei. Eram 15h59 minutos. A que horas coloquei o gato fora de casa?

Resolução:

Vamos listar os eventos ocorridos e contar o tempo gasto em cada um.

A primeira atividade foi colocar o gato fora da casa. Logo, nossa lista começa com essa atividade e o tempo é contado a partir dela.

Atividade	**Tempo depois que o gato foi posto fora de casa**
Gato fora de casa	0 minutos
Bolo no forno	10 minutos
Fazer o café	10 + 6 = 16 minutos
Despertador toca	10 + 35 = 45 minutos
Gato entra em casa	45 - 5 = 40 minutos
Acabar de tomar o café	40 + 3 = 43 minutos
Telefone toca	16 + (40 - 16) / 2 = 28 minutos
Desligar o telefone	28 + 5 = 33 minutos

Segundo o quadro, às 15h59min desliguei o telefone, o que ocorreu 33 minutos depois de colocar o gato fora de casa. Logo a resposta é 15h59min - 00h33min = **15h26min**.

02) O mágico Magimático chama três pessoas da plateia: Ana, Beto e Caio, para ajudarem em sua matemágica. Ele diz para cada um pensar em um número de 1 a 50, sem revelá-lo ao mágico, e contá-lo para cada um dos outros dois participantes. Em seguida, cada um deles deve simultaneamente trocar o seu número pela soma dos números dos outros dois. Por exemplo, Ana passa a ter a soma dos números de Beto e Caio. Magimático pede então que eles repitam esse processo mais uma vez. Após concluir a segunda troca, ele pede que falem os seus números. Ana responde 104, Beto 123 e Caio 137. Para a surpresa de todos, Magimático acerta os números iniciais escolhidos pelos três. Quais foram os números escolhidos incialmente?

Resolução:

Sejam A, B e C os números que Ana, Beto e Caio pensaram, respectivamente. Nas próximas etapas o número pertencente a cada um, obedecendo a lógica da matemágica será:

1ª Etapa:

Ana Beto Caio

	A	B	C
2ª Etapa:	Ana	Beto	Caio
	B+C	A+C	A+B
3ª Etapa:	Ana	Beto	Caio
	2A+B+C	A+2B+C	A+B+2C

Temos que:

2A+B+C=104

A+2+B+C=123

A+B+2C=137

Somando as três equações obtemos:

4A+4B+4C=364 → A+B+C=91

Logo, concluímos que:

A=13

B=32

C=46

03) Um grupo de ex-colegas de uma escola resolveu fazer uma festa e cotizar a despesa total. Entretanto, oito dos ex-colegas que participaram da festa não puderam contribuir com as despesas, e novo rateio foi feito. O curioso é que a despesa total era igual ao valor pago a mais por cada um dos que contribuíram multiplicado por R$240,00. De acordo com esses dados, quantos participaram da festa?

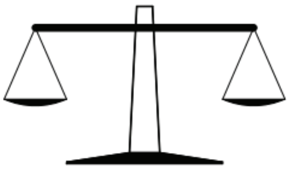
Resolução:

Sejam x o número de pessoas que participaram da festa e y o valor da despesa total. Então, o número de pessoas que contribuiu com o rateio é $x-8$.
Dessa forma:

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\frac{y}{x-8}-\frac{y}{x}\right)\cdot 240\\
y &= y\left(\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x}\right)\cdot 240\\
x(x-8) &= 240x-240(x-8)\\
x^2-8x+1920 &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad x' = 48\\
& \qquad\qquad\qquad\quad\ \ x'' = negativo
\end{aligned}
$$

Portanto, participaram da festa **48 pessoas**.

04) João possui nove moedas e ele sabe que exatamente uma delas é mais leve que as demais. Como ele pode descobrir a moeda mais leve, com uma balança de dois pratos e exatamente duas pesagens, se as demais possuem o mesmo peso?



Resolução:

Dividimos as moedas em três grupos de três e compramos dois deles na balança.

1º caso – a balança se equilibra

Nesse caso basta comparar duas moedas do grupo restante. Se equilibrar novamente, a moeda mais leve será a terceira restante, caso ocorra o desequilíbrio, a moeda mais leve será a que estará na balança.

2º caso – a balança desequilibra

Nesse caso a moeda procurada estará no grupo mais leve. Na segunda pesagem, basta comparar duas moedas desse grupo e o resultado será o mesmo do 1º caso.

05) Um torneio de futebol foi disputado por quatro equipes em dois turnos, isto é, cada equipe jogou duas vezes com cada uma das outras. Pelo regulamento do torneio, para cada vitória são atribuídos 3 pontos ao vencedor e nenhum ponto ao perdedor. No caso de empate, um ponto para cada equipe. A classificação final no torneio foi a seguinte:

Classificação	Equipe	Número de pontos
1° lugar	A	13
2° lugar	B	11
3° lugar	C	5
4° lugar	D	3

a) Quantas partidas foram disputadas em todo o torneio? Quantos foram os empates?

Resolução:

O número de jogos em cada turno será dado por C_2^4. Portanto o total de jogos será:

$$2 \cdot C_2^4 = 2 \cdot \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \mathbf{12}\ \boldsymbol{jogos}$$

Considere que:

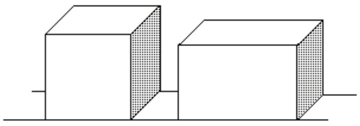
Total de pontos possíveis: $3 \cdot 12 = 36$
Total de pontos obtidos: $13 + 11 + 5 + 3 = 32$
Cada vitória resulta em 3 pontos e cada empate resulta em 2 pontos (um para cada equipe). Portanto, cada empate resulta em 1 ponto a menos que a vitória.

Logo, o número de empates é dado pela diferença entre o total de pontos possíveis e o total de pontos obtidos, ou seja, **4 empates.**

b) Construa uma tabela que mostre o número de vitórias, de empates e de derrotas de cada uma das quatro equipes.

Classificação	Equipe	Pontos	Vitórias	Empates	Derrotas
1º Lugar	A	13	**4**	**1**	**1**
2º Lugar	B	11	**3**	**2**	**1**
3º Lugar	C	5	**1**	**2**	**3**
4º Lugar	D	3	**0**	**3**	**3**

06) Um cubo de aresta de comprimento “a” vai ser transformado num paralelepípedo retorretângulo de altura 25% menor, preservando-se, porém, o seu volume e o comprimento de uma de suas arestas. Qual a diferença entre a área total (a soma das áreas das seis faces) do novo sólido e a área total do sólido original em função de “a”?



Resolução:

$$Volume\ cubo: \qquad a \times a \times a = a^3$$

$$Volume\ paralelepípedo: \qquad a \times \frac{3}{4} a \times b = a^3 \qquad \rightarrow \qquad b = \frac{4}{3} a$$

$$Área\ total\ cubo: \ a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = 6a^2$$

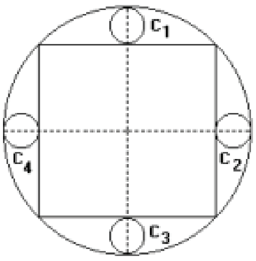
$$Área\ total\ paralelepípedo: 2 \times \left(\frac{4}{3} a \times \frac{3}{4} a\right) + 2 \times \left(\frac{4}{3} a \times a\right) + 2 \times \left(\frac{3}{4} a \times a\right)$$

$$= \frac{24a^2 + 32a^2 + 18a^2}{12} = \frac{74a^2}{12}$$

A diferença entre as áreas é:

$$\frac{74a^2}{12} - 6a^2 = \boldsymbol{\frac{a^2}{6}}$$

07) Observe a figura. Nela, a circunferência maior C tem raio 2, e cada uma das circunferências menores, C_1, C_2, C_3, C_4, é tangente a C e a um lado do quadrado inscrito. Os centros de C_1, C_2, C_3 e C_4 estão em diâmetros de C perpendiculares a lados do quadrado. Qual é soma das áreas limitadas por essas quatro circunferências menores?



Resolução:

Considerando o triângulo retângulo com os catetos formados pelos lados do quadrado e hipotenusa igual ao diâmetro da circunferência, temos:

$$2l^2 = 4^2 \qquad \Rightarrow \qquad l = 2\sqrt{2}$$

Sendo d o diâmetro das circunferências menores, então:

$$d = 2 - \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad A = 4 \cdot \frac{\pi(2-\sqrt{2})^2}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{A = 2\pi(3 - 2\sqrt{2})}$$

08) Um sítio da internet gera uma senha de 6 caracteres para cada usuário, alternando letras e algarismos. A senha é gerada de acordo com as seguintes regras:

- não há repetição de caracteres;

- começa-se sempre por uma letra;

- o algarismo que segue uma vogal corresponde a um número primo;

- o algarismo que segue uma consoante corresponde a um número par.

Quantas senhas podem ser geradas de forma que as três letras sejam A, M e R, em qualquer ordem?

Resolução:

Existem 5 números pares (0, 2, 4, 6 e 8) e 4 números primos (2, 3, 5 e 7) que podem ser utilizados. Como o número 2 é par e primo, considera-se 2 situações com a possibilidade da letra A estar no início:

1º)

$$\underset{1}{\underline{A}} \times \underset{1}{\underline{2}} \times \underset{2}{\underline{\quad}} \times \underset{4}{\underline{\quad}} \times \underset{1}{\underline{\quad}} \times \underset{3}{\underline{\quad}} = 24$$

2º)

$$\underset{1}{\underline{A}} \times \underset{3}{\underline{\quad}} \times \underset{2}{\underline{\quad}} \times \underset{5}{\underline{\quad}} \times \underset{1}{\underline{\quad}} \times \underset{4}{\underline{\quad}} = 120$$

O total de possibilidades começando com a letra A é 24+120 = 144.

A letra A poderá ocupar a terceira e quinta casa com as mesmas situações anteriores, portanto a quantidade total de senhas será $3 \times 144 = \mathbf{432}$.

09) Dois irmãos escrevem as suas idades, uma a seguir à outra, e obtêm um número com 4 algarismos que é exatamente o quadrado da idade do seu pai. Nove anos mais tarde voltam a escrever as suas idades, pela mesma ordem, obtendo novamente um número com 4 algarismos que é o quadrado da idade do seu pai. Qual é a diferença de idade entre os dois irmãos?

Resolução:

Sejam AB e CD as idades dos irmãos e "x" a do pai. O quadrado da idade do pai é o número ABCD.

Nove anos mais tarde o quadrado da idade do pai (x+9) será um número aumentado 9 na casa das centenas e 9 na casa das unidades, ou seja, aumentado 909. Logo, conclui-se que:

$$(x+9)^2 - x^2 = 909 \quad \rightarrow \quad x^2 + 18x + 81 - x^2 = 909 \quad \rightarrow \quad x = 46$$

O quadrado de 46 (idade do pai) é 2116, que corresponde às idades dos filhos, 21 e 16 anos. Portanto, a diferença das idades deles é **5 anos**.