OLIMPÍADA ESTUDANTIL ASTRA DE MATEMÁTICA

PRIMEIRA FASE

1) Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. O número de irmãos de Samila, irmã de Samuel , é igual ao dobro do número de suas irmãs. O número de filhos (homens e mulheres) que possui o pai de Samuel e Samila é:

a) 10   b) 13   c) 16   d) 17   e) 20

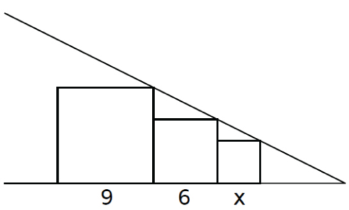
2) Com relação à dengue, o setor de vigilância sanitária de um determinado município registrou o seguinte quadro, quanto ao número de casos positivos:

- em fevereiro, relativamente a janeiro, houve um aumento de 10%.
- em março, relativamente a fevereiro, houve uma redução de 10%.

Considerando todo o período, a variação foi de:

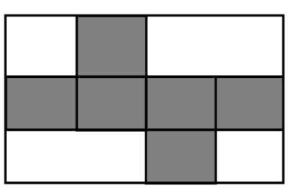
a) – 1%   b) – 0,1%   c) 0%   d) 0,1%   e) 1%

3) Na figura abaixo, há três quadrados de lados 9, 6 e x. Determine o valor de x.



a) 3   b) 3,5   c) 4   d) 4,5   e) 5

4) Com a parte destacada da folha retangular abaixo, pode-se montar um cubo. Se a área da folha é 300 cm², qual é o volume desse cubo, em cm³?



a) 5 cm³   b) 25 cm³   c) 100 cm³   d) 125 cm³   e) 625 cm³

5) Numa cidade, os números telefônicos não podem começar por zero e têm oito algarismos, dos quais os quatro primeiros constituem o prefixo. Considere que os quatro últimos dígitos de todas as farmácias são 0000 e que o prefixo da farmácia Vivavida é formado pelos dígitos 2, 4, 5 e 6, não repetidos e não necessariamente nesta ordem. O número máximo de tentativas a serem feitas para identificar o número telefônico completo dessa farmácia equivale a:

a) 6 b) 24 c) 64 d) 168 e) 240

6) Em um período em que os preços subiram 82%, os salários de certa categoria aumentaram apenas 30%. Para que os salários recuperem o poder de compra, eles devem ser aumentados em:

a) 40% b) 46% c) 52% d) 58% e) 64%

7) João queria comprar uma geladeira. Ele podia:

a) comprá-la a vista, com um desconto de x%.

b) comprá-la a prazo sem desconto, pagando metade do preço no ato da compra e a outra metade um mês após.

João tinha dinheiro suficiente para escolher qualquer das alternativas anteriores. Caso escolhesse "b", guardaria o dinheiro para pagar a segunda metade em uma caderneta de poupança, que lhe renderia 25% ao mês. O valor de x a partir do qual a alternativa "a" seria melhor para João é:

a) 5 b) 10 c) 12,5 d) 20 e) 25

8) Na figura, o triângulo ABC é equilátero e está circunscrito ao círculo de centro 0 e raio 2 cm. AD é altura do triângulo. Sendo E ponto de tangência, a medida de AE, em centímetros, é:

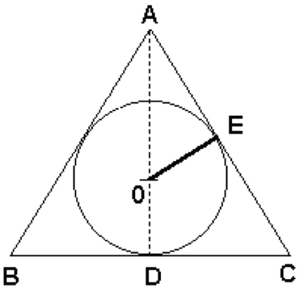
a) $2\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{5}$

c) 3

d) 5

e) $\sqrt{26}$



9) Um torneio de xadrez no qual cada jogador joga com todos os outros tem 351 partidas. O número de jogadores disputando é:

a) 22 b) 27 c) 26 d) 19 e) 23

10) Um quadrado tem dois vértices numa circunferência e um lado tangente a ela, como mostra a figura a seguir. Se a área do quadrado é de 36 cm^2, o raio da circunferência é, em centímetros:

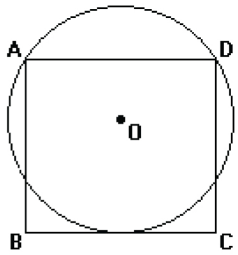
a) 2,5

b) 2,75

c) 3,25

d) 3,5

e) 3,75



11) (Dissertativa) Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante x minutos, ao fim desse tempo fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em x+3 minutos. Calcule o tempo gasto para encher o tanque.

Resolução:

As torneiras enchem $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{18}$ do tanque por minuto. Portanto:

$$\frac{x}{12} + \frac{x+3}{18} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{3x + 2x + 6}{36} = 1$$

$$5x + 6 = 36 \quad \rightarrow \quad x = 6$$

O tempo total para encher o tanque é de $x + (x + 3)$, ou seja, **15 minutos.**

NOME:

ESCOLA:

Assinale a alternativa correta com caneta. Questões com rasuras serão desconsideradas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A		X				X		X		
B					X		X		X	
C	X		X							
D				X						
E										X

OLIMPÍADA ESTUDANTIL ASTRA DE MATEMÁTICA

SEGUNDA FASE

01) Um ajudante de laboratório tem 10 g de solução salina, com 10% de sal. Quantos gramas de sal ele precisa acrescentar à solução para que a concentração de sal seja 20%?

Resolução:

Seja x a quantidade de gramas de sal a ser acrescentada na solução. Temos:

$$\frac{1+x}{10+x} = 0{,}2 \quad \rightarrow \quad 2 + 0{,}2x = 1 + x \quad \rightarrow \quad 1 = 0{,}8x$$

$$x = \mathbf{1,25g}$$

02) Durante uma viagem choveu cinco vezes. A chuva caía pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve 6 manhãs e 3 tardes sem chuva. Quantos dias durou a viagem?

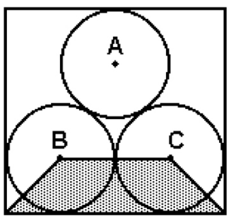
Resolução:

Seja t o número de dias que durou a viagem. Temos:

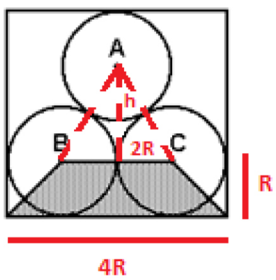
$$(t-6) + (t-3) = 5 \quad \rightarrow \quad 2t = 14$$

$$\boldsymbol{t = 7\ dias}$$

03) Na figura a seguir, A, B e C são centros de circunferências iguais. Se a área do trapézio assinalado é 3 cm^2, qual é a área do retângulo?



Resolução:



Pela fórmula da área do trapézio, encontramos o raio das circunferências.

$$A = \frac{(2R + 4R) \times R}{2} \quad \rightarrow \quad 3 = 3R^2 \quad \rightarrow \quad R = 1$$

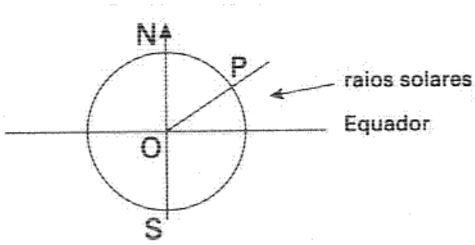
A altura do retângulo é o resultado da soma da altura do triângulo equilátero ABC mais 2 raios das circunferências.

$$h_{\Delta ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \qquad \to \qquad h_R = 2 + \sqrt{3}$$

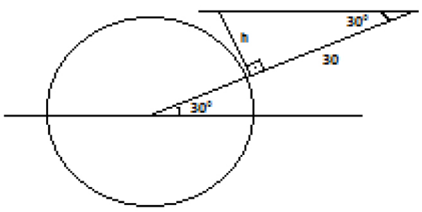
Logo,

$$A_R = 4 \times \left(2 + \sqrt{3}\right) = \mathbf{8 + 4\sqrt{3}cm^2}$$

04) A Latitude de um ponto P da superfície da Terra é o ângulo que a reta OP forma com o plano do Equador (O é o centro da Terra). No dia 21 de março os raios solares são paralelos ao plano do Equador. Calcule o comprimento da sombra projetada, no dia 21 de março ao meio dia, por um prédio de 30 m de altura, localizado a 30° de Latitude.



Resolução:



Por ângulos alternos internos encontramos o ângulo de 30° do triângulo. Calculamos a altura h pela fórmula da tangente:

$$tg30° = \frac{h}{30} \qquad \to \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{30}$$

$$\boldsymbol{h = 10\sqrt{3}m}$$

05) Dois homens começam a caminhar um em direção ao outro, a partir de dois pontos M e N distantes 72 km. O primeiro homem caminha a uma velocidade de 4km/h. O segundo homem caminha a 2 km/h durante a primeira hora, 2,5 km/h durante a segunda hora, 3km/h durante a terceira hora e assim por diante. Nestas condições após quanto tempo os homens se encontrarão e a qual distância do ponto M?

Resolução:

Seja t o tempo que cada cidadão caminha. A distância caminhada pelo segundo homem é dada por

$$S = 2 + 2{,}5 + \cdots + 2 + \frac{t-1}{2} = \frac{7t+t^2}{4} \text{ (soma de progressão aritmética)}$$

Logo,

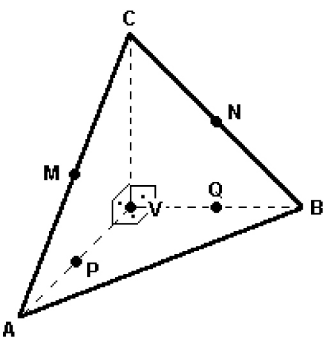
$$\frac{7t+t^2}{4} + 4t = 72 \qquad \rightarrow \qquad t = 9$$

Portanto, eles se encontrarão após 9 horas e cada homem caminhará 36km, se encontrando na metade do caminho entre M e N.

06) Na figura adiante, VABC é um tetraedro tal que os três ângulos das faces em V são retos e as arestas VA, VB e VC têm a mesma medida 6 cm. Se M, N, P e Q são os pontos médios das arestas a que pertencem:

a) Provar que MNPQ é um retângulo.

b) Determinar a área de MNPQ.



Resolução:

a) Como M, N, P e Q são pontos médios, então QN e MP são bases médias dos triângulos VBC e VAC e tem 3 cm de comprimento. Os triângulos VBC e VAC (planos) são perpendiculares ao triângulo VAB (plano). MN e PQ são bases médias dos triângulos CAB e VAB e medem metade de AB. Lados opostos paralelos, perpendiculares (e de mesma medida dois a dois). Logo, MNQP é um retângulo.

b) No triângulo VAB temos:

$$(AB)^2 = 6^2 + 6^2$$

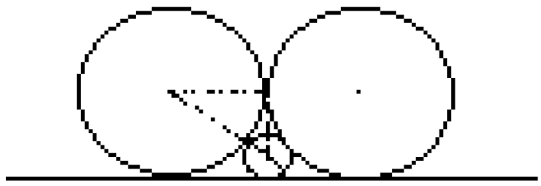
$$AB = 6\sqrt{2}$$

Logo,

$$Área_{MNPQ} = 3\sqrt{2} \times 3 = \mathbf{9\sqrt{2}cm^2}$$

07) No mesmo lado de uma reta são desenhados 3 círculos assim: um círculo tem 4 cm de raio e tangencia a reta, os outros dois círculos são iguais e cada um tangencia a reta e os outros dois círculos. Qual a medida do raio dos círculos iguais?

Resolução:



Seja R o raio dos círculos maiores e 4 o raio do menor. Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$(R+4)^2 = R^2 + (R-4)^2$$

$$\mathbf{R = 16cm}$$

08) Escrevi todos os números possíveis trocando a ordem dos algarismos do número 78523 e os organizei em ordem crescente sendo que o primeiro é o 23578.

a) Determine a posição ocupada pelo número 78523.
b) Calcule a soma de todos os números listados.

Resolução:

a) Vamos calcular quantos números estão antes dele na lista. Os primeiros números na lista iniciam com 2 e, permutando os outros 4 algarismos, temos 24 números. Há mais 24 números que iniciam com 3 e outros 24 iniciando com 5.

Começando com 72 e permutando os outros 3 algarismos temos 6 números. O caso é análogo para 73 e 75. Para 782 e 783 temos 2 números em cada. Logo, o próximo número é 78523 e a posição ocupada é

$$24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = \mathbf{95}$$

b) Cada algarismo aparece na posição das unidades 24 vezes (4!). Então, temos:

$$(7 + 8 + 5 + 2 + 3) \times 24 = 600\ unidades$$

Nas posições seguintes (dezenas, centenas...) ocorre o mesmo processo. Portanto, a soma é:

$$600 \times 10.000 + 600 \times 1.000 + 600 \times 100 + 600 \times 10 + 600 = \mathbf{6.666.600}$$