

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL

**ASTRA**

DE MATEMÁTICA

---

PRIMEIRA FASE

1) Há um ano, Bruno comprou uma casa por R\$50.000,00. Para isso, tomou emprestados R\$10.000,00 de Edson e R\$10.000,00 de Carlos, prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano, acrescido de 5% e 4% de juros, respectivamente. A casa valorizou 3% durante este período de um ano. Sabendo-se que Bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a Edson e Carlos, o seu lucro foi de:

- a) R\$ 400,00    b) R\$ 500,00    c) R\$ 600,00    d) R\$ 700,00    e) R\$ 800,00

2) Um time de futebol ganhou 8 jogos a mais do que perdeu e empatou 3 jogos a menos do que ganhou, em 31 partidas jogadas. Quantas partidas o time venceu?

- a) 11    b) 14    c) 15    d) 17    e) 23

3) No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completou em 2006?

- a) 55    b) 56    c) 60    d) 62    e) 108

4) Em uma escola, duas turmas têm o mesmo número de alunos. O percentual de uma dessas turmas que deve migrar para a outra, de modo que ela passe a ter  $\frac{1}{3}$  do número de alunos dessa outra, é igual a:

- a) 20%.    b) 30%.    c) 40%.    d) 50%.    e) 60%.

5) Uma chácara produz duas qualidades de sumo de laranja, a L-Laranja com 5% de concentrado de laranja e a S-Laranja com 2%. Em que razão deve ser misturada a L-Laranja com a S-Laranja para obter a M-Laranja com 4% de concentrado de laranja?

- a) 1 para 3    b) 1 para 2    c) 2 para 3    d) 2 para 1    e) 3 para 2

6) Para esvaziar uma caixa d'água são necessárias 16 horas enquanto que para o encher bastam 12 horas. O jardineiro do parque começou a encher a caixa d'água as 9 horas do dia 30 de Março, mas esqueceu-se de fechar a saída da água. A que horas é que caixa d'água ficará cheia?

- a) 1h de 31-03    b) 9h de 31-03    c) 13h de 31-03    d) 9h de 1-04    e) 13h de 1-04

7) Seis amigos planejam viajar e decidem fazê-lo em duplas, cada uma utilizando um meio de transporte diferente, dentre os seguintes: avião, trem e carro. Alexandre acompanha Bento. André viaja de avião. Carlos não acompanha Dário nem faz uso do avião. Tomás não anda de trem. Qual das afirmações a seguir é correta?

- a) Bento vai de carro e Carlos de avião.                      b) Dário vai de trem e André vai de carro.  
c) Tomás vai de trem e Bento vai de avião.                d) Alexandre vai de trem e Tomás vai de carro.  
e) André vai de trem e Alexandre vai de carro.

8) Na oficina temática "Cientistas no Parque" foi proposto o seguinte problema: Quantos triângulos equiláteros são possíveis formar com quaisquer três vértices de um cubo?

- a) 7            b) 8            c) 12            d) 24            e) 48

9) Se ignorarmos o “duplo zero”, as 27 peças restantes de um jogo de dominó podem ser vistas como frações menores do que ou iguais a 1. Por exemplo,



A peça ao lado representa a fração  $\frac{2}{6}$

Qual é a soma dessas 27 frações?

- a) 27            b)  $\frac{27}{2}$             c)  $\frac{27}{20}$             d)  $\frac{28}{27}$             e) 1

10) A Piscina do Parque da Uva tem a forma de um paralelepípedo e esta revestido com azulejos quadrados todos iguais. O fundo do lago tem 154 azulejos e os quatros lados tem um total de 650 azulejos. Qual é em número de azulejos, a profundidade do lago?

- a) 5            b) 13            c) 25            d) 26            e) 65



OLIMPIÁDA ESTUDANTIL

**ASTRA**

DE MATEMÁTICA

---

SEGUNDA FASE

**01)** Em uma faculdade, 60% dos alunos são homens e 30% dos alunos cursam Economia. Se apenas 20% das mulheres cursam Economia, qual a porcentagem dos alunos, formada por homens, que cursam Economia?

**Resolução:**

Temos que 40% dos alunos são mulheres, e 20% das mulheres cursam economia, então a porcentagem de mulheres dentre os alunos que cursam economia é

$$0,2 \cdot 0,4 = 0,08 = 8\%$$

Logo, a porcentagem dos alunos, formada por homens, que cursam Economia é

$$30\% - 8\% = 22\%.$$

**02)** Todos os convidados de uma festa trocaram apertos de mãos. Um mordomo mais atento notou que foram 528 cumprimentos e que  $\frac{2}{3}$  dos convidados eram mulheres. Quantos homens foram convidados?

**Resolução:**

Seja  $x$  o número total de convidados. Cada convidado aperta a mão de  $x - 1$  pessoas, porém, quando A cumprimenta B, B também cumprimenta A. Logo, o número de apertos de mãos é

$$\frac{x(x - 1)}{2}$$

O número total de cumprimentos foi 528.

$$\frac{x(x - 1)}{2} = 528 \quad \rightarrow \quad x^2 - x = 1056$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos  $x = 33$  ou  $x = -32$ . Como o número de convidados não pode ser negativo, a única solução é  $x = 33$ .

Temos que  $\frac{1}{3}$  dos convidados são homens, ou seja, 11.

**03)** Meu irmão caçula e eu temos idades entre 10 e 20 anos, e hoje nossas idades são expressas, ambas, por números primos, fato que se repetirá pela próxima vez daqui a 18 anos. Determine minha idade, sabendo que a idade de nosso irmão mais velho, que hoje também é um número primo, é uma unidade maior que a soma das nossas idades.

**Resolução:**

Temos as seguintes condições:

- $x$  é primo entre 10 e 20, tal que  $x + 18$  é primo;
- $y$  é primo entre 10 e 20, tal que  $y + 18$  é primo;
- $x + y + 1 = z$ , tal que  $z$  é primo.

Aplicando (c) para  $x, y = \{11, 13, 19\}$ , temos as seguintes possibilidades:

$$11 + 13 + 1 = 25 \text{ (25 não é número primo)}$$

$$11 + 19 + 1 = 31 \text{ (31 é número primo)}$$

$$13 + 19 + 1 = 33 \text{ (33 não é número primo)}$$

Portanto, a idade do irmão mais velho é 31 anos, eu tenho 19 anos e meu irmão caçula tem 11 anos.

**04)** Um fazendeiro tinha ração suficiente para alimentar suas 20 vacas por 30 dias. Depois de algum tempo ele vendeu algumas vacas e, com isso, a ração durou alguns dias a mais. O gráfico mostra a quantidade diária de ração disponível durante esse período, expressa com um percentual da quantidade inicial. Quantas vacas o fazendeiro vendeu?



Resolução:

Seja  $x$  a quantidade de ração que uma vaca come em um dia.

$$20 \times 30 = 600x$$

No dia da venda já foi consumido 40% da ração.

$$0,40 \times 600x = 240x$$

Como as 20 vacas consomem  $20x$  ração por dia, a venda ocorreu no 12º dia.

$$\frac{240x}{20x} = 12$$

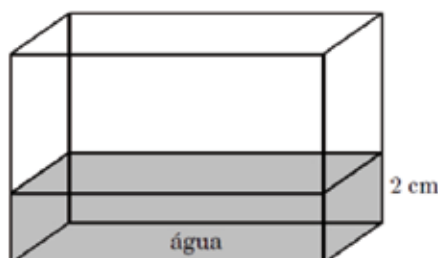
Após a venda, sobrou  $360x$  de ração para alimentar o restante de vacas por 24 dias ( $36 - 12 = 24$ ).

Seja  $v$  a quantidade de vacas vendidas. Logo,

$$(20 - v) \times 24 = 360 \quad \rightarrow \quad v = 5$$

Portanto, o fazendeiro vendeu 5 vacas.

**05)** Maria encheu uma caixa em forma de paralelepípedo retangular com 160 ml de água e a apoiou em uma das suas faces, como na figura abaixo:



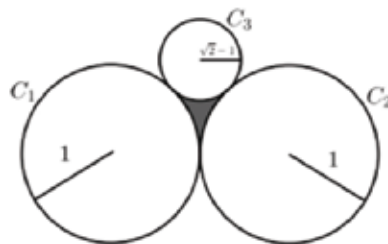
Maria, então, mediu a altura que a água atingiu e obteve 2 cm. Depois, ela repetiu o experimento apoiando a caixa em outras faces e obteve alturas de 4 cm e 5 cm. Quais são as dimensões (largura, altura e comprimento) da caixa?

**Resolução:**

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as dimensões (largura, altura e comprimento) da caixa. Então, pelas medições dos volumes feitas por Maria, temos:

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot 2 = 160 \\ x \cdot z \cdot 4 = 160 \\ y \cdot z \cdot 5 = 160 \end{cases} \quad \text{Deste sistema resulta que} \quad x = 10; \quad y = 8; \quad z = 4.$$

**06)** Em uma folha de papel, Emanuelle desenha duas circunferências de raio 1 que se tangenciam em um ponto. Em seguida, ela desenha uma terceira circunferência de raio  $1 - \sqrt{2}$  que tangencia as duas anteriores externamente, conforme a figura abaixo. Emanuelle calcula a área da região limitada e exterior às três circunferências que é mostrada em cinza na figura acima. Qual o valor por ela encontrado?



### QUESTÃO ANULADA

**07)** Esta manhã, após minhas aulas, desci a escada, pois o elevador estava quebrado. Eu já havia descido 7 degraus, quando o professor Zezo começou a subir a escada. Continuei no meu passo usual, cumprimentei o professor quando ele passou e, para minha surpresa, faltando 4 degraus para eu acabar de descer, o professor tinha chegado ao topo da escada. “Enquanto desço 1 degrau, ele sobe 2”, eu pensei. Quantos degraus tem a escada?

**Resolução:**



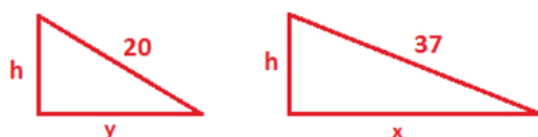
Note que, enquanto desci  $x$  degraus, o professor Zezo subiu  $2x$  degraus, que representa o número total de degraus da escada. Porém, já havia descido 7 degraus e no final faltaram 4 para descer completamente a escada. Este raciocínio resulta na seguinte equação:

$$x + 7 + 4 = 2x \Rightarrow x = 11.$$

Logo, a escada tem 22 degraus.

**08)** Dois triângulos retângulos têm em comum a altura. A medida da hipotenusa do menor é igual a 20, já a hipotenusa do maior é igual a 37. Qual é a medida das bases sabendo-se que diferença entre elas é igual a 19?

Resolução:



$$(I) \quad 20^2 = h^2 + y^2$$

$$(II) \quad 37^2 = h^2 + x^2$$

Subtraindo a equação (II) da (I),

$$1369 - 400 = x^2 - y^2$$

$$969 = (x + y)(x - y)$$

$$969 = (x + y) \times 19$$

$$x + y = 51$$

Temos:

$$\begin{cases} x - y = 19 \\ x + y = 51 \end{cases}$$

Do sistema de equações acima obtemos:

$$x = 35$$

$$y = 16$$

**09)** Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10m de lado, que terá canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito

ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento deste segmento AB está indicado por  $x$  na figura.

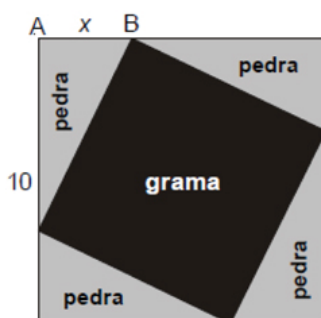
a) Calcule a área do canteiro de grama para  $x=2$ .

b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de  $x$ .

Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder os dois itens a seguir:

c) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

d) Se o prefeito tem apenas R\$358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?



Resolução:

a) Cada canteiro de pedra é um triângulo retângulo de catetos  $10 - x$  e  $x$ . Com  $x = 2$ , temos que a área de cada retângulo é:

$$\text{Área} = \frac{8 \times 2}{2} = 8$$

Como a área total da praça é 100, a área do canteiro de grama é:

$$\text{Área praça} = 100 - (4 \times 8) = 68m^2$$

b) Como a área de cada triângulo é  $\frac{x(10-x)}{2}$ , a área do canteiro de grama é:

$$\text{Área grama} = 100 - 4 \times \frac{x(10-x)}{2} = 2x^2 - 20x + 100$$

c) O custo total dos canteiros é:

$$\text{Custo} = 4 \times (2x^2 - 20x + 100) + 3 \times 4 \times \frac{x(10-x)}{2} = 2x^2 - 20x + 400$$

Logo, temos que o custo é uma função de segundo grau com variável  $x$ . O gráfico da função é uma parábola com cavidade para cima (o primeiro termo que acompanha  $x^2$  é positivo), apresentando um ponto de mínimo (vértice da parábola).

Dada uma função  $ax^2 + bx + c$ , os vértices  $x$  e  $y$  podem ser encontrados pelas fórmulas:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad e \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo,

$$x_v = -\frac{20}{2 \times 2} = 5$$

Podemos encontrar o custo total através da fórmula  $y_v$  ou substituindo o valor encontrado de  $x_v$  na equação.

$$\text{Custo} = 2 \times 5^2 - 20 \times (5) + 400 = 350$$

Portanto, o custo mínimo é de R\$ 350,00.

d) Pela equação do custo temos:

$$2x^2 - 20x + 400 = 358$$

$$2x^2 - 20x + 42 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau obtemos como soluções  $x_I = 7$  e  $x_{II} = 3$ .

Com as duas soluções obteremos canteiros de pedra com catetos 10 e 3. Pelo teorema de Pitágoras encontramos o valor da hipotenusa do triângulo, que é o lado do canteiro de grama.

$$h^2 = 7^2 + 3^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{58}$$

A área do canteiro de grama será:

$$\text{Área grama} = \sqrt{58} \times \sqrt{58} = 58m^2$$