OLIMPÍADA ESTUDANTIL

ASTRA

DE MATEMÁTICA

18ª OLIMPÍADA - 2013

1ª fase

01) Uma prova de triatlo compreende três etapas: natação, ciclismo e corrida. Em uma dessas provas, dos 170 atletas que iniciaram a competição, dez abandonaram na etapa de natação; dos que continuaram, ¼ desistiu ao longo da etapa de ciclismo; e dos que começaram a terceira e última etapa, 20% abandonaram a corrida. Apenas **N** atletas completaram a prova. Então é correto afirmar que a soma dos algarismos do número **N** é:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

02) A professora de História, querendo fazer um trabalho em grupo, resolveu dividir seus alunos em grupos de 4 alunos e sobraram 2. Então dividiu novamente em grupos de 5 alunos e um ficou de fora. Se 15 alunos são mulheres e tem mais mulheres do que homens, o número de alunos homens é:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

03) Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool.
A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

a) 20% b) 24% c) 28% d) 26% e) 22%

04) Cada seleção participante da Copa do Mundo de futebol inscreve 23 jogadores, sendo necessariamente três goleiros. Em cada partida, dois jogadores de cada seleção são escolhidos entre os 23 inscritos para o exame antidoping, mas são descartadas as possibilidades de que os dois jogadores escolhidos seja goleiros. De quantas maneiras diferentes estes dois jogadores podem ser escolhidos?

a) 506 b) 250 c) 253 d) 503 e) 69

05) As cinco cartas abaixo estão sobre uma mesa, e cada uma tem um número na face e uma letra na outra. Simone deve decidir se a seguinte frase é verdadeira: “*Se uma carta tem uma vogal numa face, então ela tem um número par na outra*.” Qual o menor número de cartas que ela precisa virar para decidir corretamente?

2	3	M	A	E

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

06) A média das notas de todos os alunos de uma turma é 5,8. Se a média dos rapazes é 6,3 e a das moças é 4,3, a porcentagem de rapazes na turma é:

a) 60% b) 65% c) 70% d) 75% e) 80%

07) Duas torneiras enchem um tanque em 6 horas. Sozinha, uma delas gasta 5 horas mais que a outra. Determine a soma dos tempos que as torneiras levariam para encher esse tanque isoladamente.

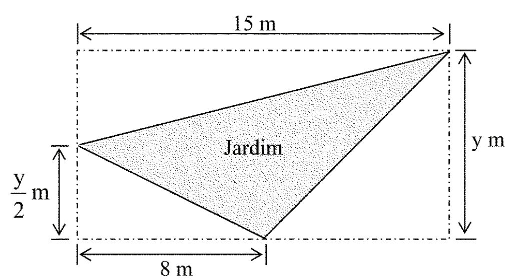
a)7h b)11h c)25h d)32h e)150h

08) No papiro de Rhind, um antigo texto matemático egípcio que data de 1650 a.C., em vários dos problemas citados a área de um círculo é tomada como sendo igual à área de um quadrado cujo lado é igual a 8/9 do diâmetro do círculo. De acordo com essa informação, o valor assumido pelos egípcios antigos para π, com duas casas de aproximação, é:

a) 3,12. b) 3,13. c) 3,15. d) 3,16. e) 3,17.

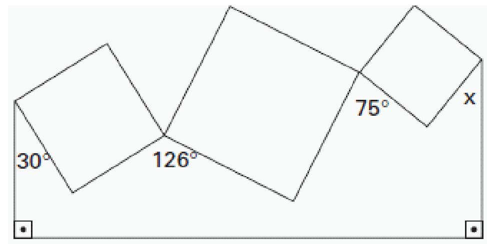
09) No projeto de reforma de uma casa, pretende-se fazer um jardim em forma de triângulo numa área retangular de dimensões 15 m × y m. Qual deve ser o valor de y, de modo que o jardim tenha uma área de 23 m^2?

a) 4,0 m b) 1,5 m c) 3,0 m d) 1,0 m e) 3,5 m



10) Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura ao lado. Qual a medida do ângulo x?

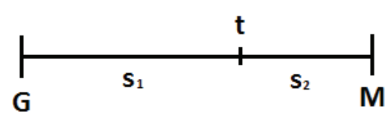
a) 39°
b) 41°
c) 43°
d) 44°
e) 46°



11) DISSERTATIVA: Esta questão deverá conter a resolução.

Geraldinho e Magrão saíram de suas casas no mesmo instante com a intenção de um visitar o outro, caminhando pelo mesmo percurso. Geraldinho ia pensando num problema de olimpíada e Magrão ia refletindo sobre questões filosóficas e nem perceberam quando se cruzaram. Dez minutos depois, Geraldinho chegava à casa de Magrão e meia hora mais tarde, Magrão chegava à casa de Geraldinho. Quanto tempo cada um deles andou?

Resolução:



$$G \quad \frac{s}{t} \quad \frac{s}{10} \quad \rightarrow \quad \frac{s}{s} = \frac{t}{}$$

$$M \quad \frac{s}{t} \quad \frac{s}{40} \quad \rightarrow \quad \frac{s}{s} = \frac{40}{t}$$

$$\frac{t}{} = \frac{40}{t} \quad \rightarrow \quad t \;\; = 400 \quad \rightarrow \quad t \quad 20$$

Logo, Geraldinho andou 10+20 = **30 minutos** e Magrão andou 40+20 = **60 minutos**.

NOME:

ESCOLA:

Assinale a alternativa correta com caneta. Questões com rasuras serão desconsideradas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A									X	X
B				X						
C					X		X			
D	X		X			X		X		
E		X								

OLIMPÍADA ESTUDANTIL

ASTRA

DE MATEMÁTICA

18ª OLIMPÍADA - 2013

2ª fase

01) O Senhor Pereira possui uma cabra, uma ovelha e uma vaca. A ração que comprou é suficiente para alimentar a cabra durante doze semanas. A mesma ração é suficiente para alimentar a ovelha durante seis semanas ou para alimentar a vaca durante três semanas. Durante quanto tempo pode o Senhor Pereira alimentar seus três animais com a ração que comprou?

Resolução:

Sabemos que a ração comprada alimentaria a cabra por 12 semanas, ou seja, 84 dias. Como a ovelha e a vaca comem, respectivamente, o dobro e o quádruplo do que come a cabra, os três animais juntos comem $1 + 2 + 4 = 7$ vezes o que come a cabra. Portanto, com a ração comprada é possível alimentar os três animais durante um sétimo de 84 dias, o que resulta em $\mathbf{12}$ **dias**.

02) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e seis vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, calcule o número de maneiras distintas de montar a composição.

Resolução:

São 7 posições a serem preenchidas. A locomotiva deve ir à frente, resultando em apenas uma alternativa para a primeira posição, o vagão-restaurante não pode seguir a locomotiva, portanto na segunda posição temos os 5 vagões de alternativa. Na terceira posição, há a possibilidade de preenchimento dos 4 vagões restantes mais o vagão-restaurante. Nas seguintes posições podem ser colocados os vagões que sobraram. Logo, o número de maneiras será:

$$1 \times 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{600}$$

03) Augusto comprou dois terrenos pagando um total de R$ 45.000,00. O primeiro foi vendido com um lucro igual a 20% do preço de custo; já o segundo foi vendido com um prejuízo de 10% do preço de custo. Todavia, no total, Augusto acabou ainda lucrando R$ 3.000,00 em relação ao que pagou. Qual a diferença (em valor absoluto) entre os preços pagos na compra?

Resolução:

Sejam C_1 - preço de compra do primeiro terreno
C_2 - preço de compra do segundo terreno
L_1 - lucro do primeiro terreno
L_2 - lucro do segundo terreno

Temos que

$L_1 = 0{,}2C_1$ e $L_2 = -0{,}1C_2$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 45.000{,}00 \\ L_1 + L_2 = 3.000{,}00 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phantom{0{,}2}C_1 + \phantom{0{,}1}C_2 = 45.000{,}00 \\ 0{,}2C_1 - 0{,}1C_2 = 3.000{,}00 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 25.000{,}00 \;\; e \;\; C_2 = 20.000{,}00$$

Portanto $C_1 - C_2 = \mathbf{5.000,00}$.

04) Em uma pesquisa, foram consultados 600 consumidores sobre sua satisfação em relação a uma certa marca de sabão em pó. Cada consumidor deu uma nota de 0 a 10 para o produto, e a média final das notas foi 8,5. Qual será o número mínimo de consumidores que devem ser consultados, além dos que já foram, para que essa média passe para 9?

Resolução:

Para que sejam consultados um número mínimo "x" de consumidores e a média passe para 9, a nota dada por todos deve ser 10. Logo, o número mínimo será calculado pela média ponderada:

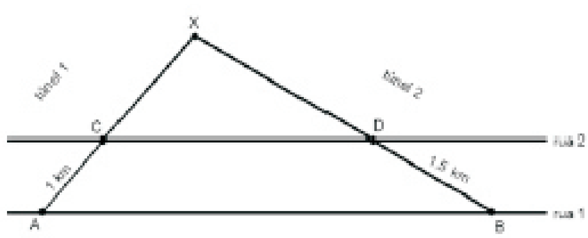
$$9 = \frac{(600 \times 8{,}5) + (x \times 10)}{(600 + x)}$$

$$9 \times (600 + x) = 5100 + 10x \quad \rightarrow \quad 5400 + 9x = 5100 + 10x$$

$$10x - 9x = 5400 - 5100$$

$$\boldsymbol{x = 300}$$

05) Sob duas ruas paralelas de uma cidade serão construídos, a partir das estações A e B, passando pelas estações C e D, dois túneis retilíneos que se encontrarão na estação X, conforme ilustra a figura abaixo.



A distância entre as estações A e C é de 1km e entre as estações B e D, de 1,5km. Em cada um dos túneis são perfurados 12m por dia. Sabendo que o túnel 1 demandará 250 dias para ser construído e que os túneis deverão se encontrar em X, no mesmo dia, qual será o número de dias que a construção do túnel 2 deverá anteceder à construção do túnel 1?

Resolução:

O túnel 1 demandará 250 dias para ser construído com uma produção diária de 12m, portanto tem $250 \times 12 = 3000$ metros da estação A até a X. Pelo Teorema de Thales, segue que

$$\frac{AX}{AC} = \frac{BX}{BD} \iff \frac{3000}{1000} = \frac{BX}{1500} \iff BX = 4500\ m$$

Portanto o túnel 2 tem 4500m de extensão da estação B até a X e demandará $\frac{4500}{12} = 375$ dias para ser construído. Dessa forma, para que os túneis se encontrem em X no mesmo dia, a construção do túnel 2 deverá anteceder a do túnel 1 em $375 - 250 = \mathbf{125}$ **dias**.

06) Quatro casais juntam-se para um jogo de xadrez. Sabendo que

- A Beatriz jogou contra o Eduardo,
- A Alice jogou contra o marido da Clara;
- O Frederico jogou contra a mulher do Gustavo,
- A Dora jogou contra o marido da Alice,
- O Gustavo jogou contra a mulher do Eduardo.

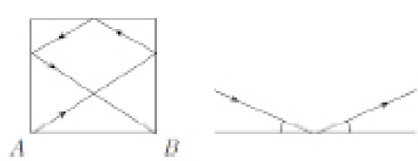
Quem está casada com o Humberto?

Resolução:

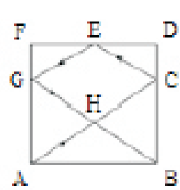
Como o Eduardo jogou com a Beatriz, ele não é marido nem da Clara (este jogou com a Alice), nem da Alice (este jogou com a Dora), nem da Beatriz (pois foi o Gustavo que jogou com a mulher do Eduardo). O Eduardo é então casado com a Dora.

Assim, o Gustavo jogou com a Dora, sendo portanto casado com a Alice.
Frederico jogou com a Alice, logo ele é marido da Clara. Portanto, o Humberto é casado com a Beatriz.

07) Numa mesa de bilhar quadrada de lado 2m, uma bola é atirada de um canto. Depois de tocar três lados, a bola atinge o canto B, conforme figura. Quantos metros a bola percorreu? (Lembre-se que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, conforme indicado na figura da direita).



Resolução:



Como os ângulos de incidência e de reflexão são iguais, temos que os triângulos ABC e EDC são semelhantes. Dessa forma, denotando $BC = a$ e $DC = b$, temos

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad a = 2b$$

Então,

$$\begin{cases} a = 2b \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{4}{3} \quad e \quad b = \frac{2}{3}$$

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ECD, obtemos

$$EC^2 = 1^2 + \left({}^{2}/_{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad EC = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

Portanto, pelas igualdades $AH = HC = CE = EG = GH = HB = \frac{\sqrt{13}}{3}$, concluímos que a bola percorreu $6 \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = \mathbf{2\sqrt{13}\ m}$.

08) Um comerciante comprou certo artigo com um desconto de 20% sobre o preço de tabela. Em sua loja, ele fixou um preço para tal artigo, de modo a poder vendê-lo dando aos clientes um desconto de 25% e a obter um lucro de 40% sobre o preço fixado. Nessas condições, sabendo que pela compra de uma unidade desse artigo um cliente terá que desembolsar R$ 42,00, qual o seu preço de tabela?

Resolução:

O produto estava à venda na loja por "x" reais e foi vendido com 25% de desconto a $R\$$ 42,00. Logo, o preço inicial era:

$$x = \frac{42}{(1-0{,}25)} \qquad \rightarrow \qquad x = R\$\ 56{,}00$$

O comerciante quer obter um lucro de 40% sobre o preço fixado.

$$y = 56 \times 0{,}4 \qquad \rightarrow \qquad y = R\$\ 22{,}40$$

Diminuindo esse valor do preço de venda temos o valor do preço de tabela com desconto de 20% comprado pelo comerciante:

$$42{,}00 - 22{,}40 = R\$\ 19{,}60$$

Logo, o preço de tabela é:

$$P = \frac{19{,}60}{(1-0{,}20)} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{P = R\$\ 24{,}50}$$

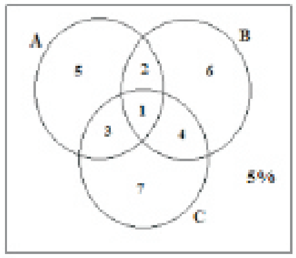
09) Uma pesquisa de mercado sobre o consumo de três marcas A, B e C de um determinado produto apresentou os seguintes resultados:

A: 48%	A e B: 18%
B: 45%	B e C: 25%
C: 50%	A e C: 15%

Nenhuma das três: 5%

Determine qual a porcentagem dos entrevistados que consomem uma e apenas uma das três marcas.

Resolução:



Como não sabemos o valor da interseção dos três conjuntos, vamos chamar de x. Assim,

1) $A \cap B \cap C = x$
2) $A \cap B = 18\% - x$
3) $A \cap C = 15\% - x$
4) $B \cap C = 25\% - x$

Logo,

5) $n(A) = 48 - (15 - x + x + 18 - x) = 15 + x$
6) $n(B) = 45 - (18 - x + x + 25 - x) = 2 + x$
7) $n(A) = 50 - (15 - x + x + 25 - x) = 10 + x$

Lembrando que 5% não consome nenhuma das marcas.

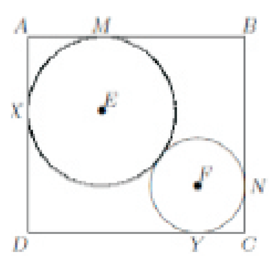
Somando todos estes valores obtemos 100% dos entrevistados, o que resulta em

$$15 + x + x - 15 - x + 18 - x + 2 + x + 25 - x + 10 + x + 5 = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 10\%$$

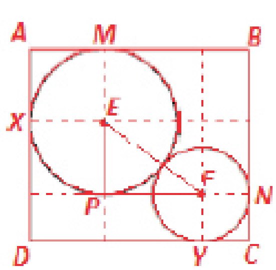
O número de entrevistados que consomem uma e apenas uma das três marcas é dada por

$n(A) + n(B) + n(C) = 15\% + x + 2\% + x + 10\% + x = 27\% + 3 \cdot 10\% = 57\%$.

10) Na figura $\overline{AB} = 9$ e $\overline{AD} = 8$. As duas circunferências, tangentes entre si, têm centros E e F e são tangentes aos lados do retângulo $[ABCD]$ nos pontos M, N, X e Y. Sabendo que o raio da circunferência de centro F mede 2, quanto mede o raio da circunferência de centro E?



Resolução:



Seja "r" o raio da circunferência de centro E. As medidas de $\overline{EP}$, $\overline{PF}$ e $\overline{EF}$ são:

$$\overline{EP} = 8 - r - 2 \quad \rightarrow \quad \overline{EP} = 6 - r$$

$$\overline{PF} = 9 - r - 2 \quad \rightarrow \quad \overline{PF} = 7 - r$$

$$\overline{EF} = 2 + r$$

Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$(\overline{EF})^2 = (\overline{EP})^2 + (\overline{PF})^2$$

$$(r+2)^2 = (6-r)^2 + (7-r)^2 \quad \rightarrow \quad r^2 - 30r + 81 = 0$$

As soluções desta equação são $r = 3$ e $r = 27$, mas como $r < 8$ conclui-se que $\boldsymbol{r = 3}$.