

17ª OLIMPIÁDA - 2012
1ª fase

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL

ASTRA

DE MATEMÁTICA

01) Se hoje Rafael tem 20 anos e Patrícia tem 18 anos, então ela terá 92% da idade dele daqui a quantos anos?

- a) () 6 b) () 5 c) () 4 d) () 3 e) () 2

02) Um terreno retangular, com área de 800 m^2 e frente maior que a lateral, foi cercado com um muro. O custo da obra de R\$12,00 por metro linear construído na frente, e de R\$8,00 por metro linear construído nas laterais e no fundo. Se foram gastos R\$1040,00 para cercar o terreno, o comprimento total do muro construído, em metros, é:

- a) () 114 b) () 120 c) () 132 d) () 180 e) () 196

03) Uma escola de ensino médio tem 250 alunos que estão matriculados na 1ª, 2ª ou 3ª série. 32% dos alunos são homens e 40% dos homens estão na 1ª série. 20% dos alunos matriculados estão na 3ª série, sendo 10 alunos homens. Dentre os alunos da 2ª série, o número de mulheres é igual ao número de homens.

	1ª	2ª	3ª	Total
Mulher	a	b	c	$a + b + c$
Homem	d	e	f	$d + e + f$
Total	$a + d$	$b + e$	$c + f$	250

A tabela anterior pode ser preenchida com as informações dadas. O valor de a é:

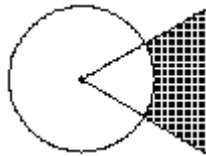
- a) () 10 b) () 48 c) () 92 d) () 102 e) () 120

04) O custo para fabricar uma bicicleta é de R\$ 84,00, e seu fabricante pretende que esse valor represente 70% do preço de venda ao lojista. Este, por sua vez, deseja que o valor pago ao fabricante seja 80% do total que custará ao consumidor final. Para que essas condições sejam satisfeitas, o preço que o consumidor final deverá pagar por uma bicicleta, em reais, é:

- a) () R\$120,00 b) () R\$150,00 c) () R\$160,00 d) () R\$180,00 e) () R\$190,00

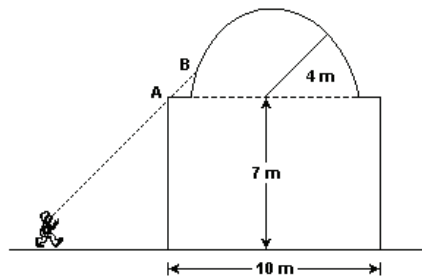
05) Uma circunferência intercepta um triângulo equilátero nos pontos médios de dois de seus lados, conforme mostra a figura, sendo que um dos vértices do triângulo é o centro da circunferência. Se o lado do triângulo mede 6 cm, a área da região destacada na figura é:

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
 DE MATEMÁTICA



- a) $() 9 [(2\sqrt{3}) - (\pi/6)] \text{ cm}^2$ c) $() 9 [(\sqrt{3}) - \pi] \text{ cm}^2$ e) $() 9 [(\sqrt{3}) - (\pi/6)] \text{ cm}^2$
 b) $() 9 [(\sqrt{3}) - (\pi/18)] \text{ cm}^2$ d) $() 9 [(\sqrt{3}) - (\pi/3)] \text{ cm}^2$

06) Uma mesquita possui uma abóboda semiesférica de 4 m de raio, cujo centro dista 7 m do chão e 5 m das paredes laterais. A figura abaixo representa um corte em perfil, em que um menino, afastado 6 m da parede lateral, mirando em A, vê o ponto B na abóboda. Considerando-se os olhos do menino a 1 m do chão e desprezando-se a espessura das paredes para o cálculo, a altura do ponto B ao chão é:



- a) $() (21 - \sqrt{7})/2 \text{ m}$ c) $() (17 - \sqrt{7})/2 \text{ m}$ e) $() 8 \text{ m}$.
 b) $() (19 - \sqrt{7})/2 \text{ m}$ d) $() (8 + \sqrt{7})/2 \text{ m}$

07) Numa certa cidade, dez por cento das mulheres pensam que são homens e dez por cento dos homens pensam que são mulheres, todas as outras pessoas são perfeitamente normais. Certo dia todas as pessoas dessa cidade foram testadas por um psicólogo, verificando que 20% das pessoas pensavam que eram homens. Qual a porcentagem real de mulheres?

- a) $() 75,5\%$ b) $() 80,0\%$ c) $() 85,5\%$ d) $() 87,5\%$ e) $() 95,5\%$

08) Para se azulejar o piso de uma sala retangular, de dimensões 6 metros por 4 metros, utilizaram-se peças cerâmicas especiais na forma de um triângulo isósceles, de base e altura iguais a 50 centímetros. As peças foram colocadas de forma justaposta, tendo sido necessário cortar algumas delas para o completo comprimento do piso. Sabendo-se que as peças foram colocadas

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

de forma a se cortar o menor número delas para realizar a tarefa, o número de peças cerâmicas que tiveram que ser cortadas para se realizar a cobertura de todo o piso da sala foi:

- a) () 4 b) () 8 c) () 12 d) () 16 e) () 20

09) Um atleta faz um treinamento cuja primeira parte consiste em sair de casa e correr em linha reta até certo local à velocidade de 12 km/h. Depois, sem intervalo, ele retorna andando a 8 km/h. Se o tempo gasto nesse treinamento foi exatamente 3 horas, o tempo em que ele correu superou o tempo em que caminhou em:

- a) () 15 minutos c) () 25 minutos e) () 43 minutos.
b) () 22 minutos d) () 36 minutos

10) Se de um ponto P qualquer forem traçados dois segmentos tangentes a uma circunferência, então as medidas dos segmentos determinados pelo ponto P e os respectivos pontos de tangência serão iguais. Sabe-se que o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo mede 1 cm. Se a hipotenusa desse triângulo for igual a 20 cm, então seu perímetro será igual a:

- a) () 40 cm b) () 35 cm c) () 23 cm d) () 42 cm e) () 45 cm

11) DISSERTATIVA: Esta questão deverá conter a resolução

Um grupo de amigos comprou um camarote no valor de R\$1.440,00 para assistir um show. Devido a um contratempo, três dos amigos não puderam ir e o restante resolveu ratear o “prejuízo”, pagando, cada um, R\$ 40,00 a mais. Quantas pessoas foram assistir o show?

RESOLUÇÃO:

Sejam:

X = número de pessoas

Y = valor para cada amigo

$$x \cdot y = 1440$$

$$(x-3) \cdot y = 1440 - (x-3) \cdot 40$$

$$x \cdot y - 3y = 1440 - 40x + 120$$

$$1440 - 3y = 1440 - 40x + 120$$

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

$$40x - 3y = 120$$

$$40x - 3 \cdot (1440/x) = 120$$

$$40x^2 - 4320 = 120x$$

$$x^2 - 3x - 108 = 0$$

$$x = 12 \text{ ou } x = -9$$

Como não pode existir um número de pessoas negativo, a resposta é 12.

NOME:

ESCOLA:

Assinale a alternativa correta com caneta. Questões com rasuras serão desconsideradas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A		X								
B	X			X				X		
C			X							
D							X		X	X
E					X	X				

17ª OLIMPIÁDA - 2012
2ª fase

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

01) No alvo representado pela figura abaixo, uma certa pontuação é dada para a flecha que cai na região sombreada S e outra para a flecha que cai no círculo central R. Diana obteve 17 pontos, lançando três flechas, das quais uma caiu em R e duas em S. Guilherme obteve 22 pontos, lançando o mesmo número de flechas, das quais uma caiu em S e duas em R. Considerando-se o desempenho dos dois arremessadores, determine o número de pontos a cada flecha que cai nas regiões R e S.

Resolução:

Podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} R + 2S = 17 \\ 2R + S = 22 \end{cases}$$

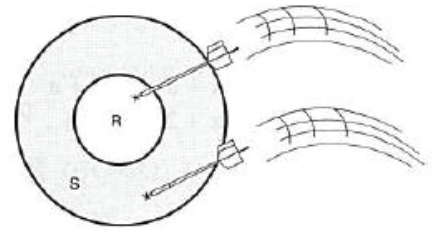
Da primeira equação temos que $R = 17 - 2S$

Substituindo na segunda vem

$$2(17 - 2S) + S = 22 \Rightarrow 34 - 4S + S = 22$$

$$\Rightarrow -3S = -12$$

$$\Rightarrow S = 4 \quad \therefore S = 4 \text{ e } R = 9$$



02) Alice, Bernardo, Cecília, Otávio e Rodrigo são irmãos. Sabemos que:

- Alice não é a mais velha.
- Cecília não é a mais moça.
- Bernardo é mais velho que Otávio.
- Rodrigo é mais velho que Cecília, porém mais moço que Alice.

Você pode descobrir a ordem em que nasceram esses cinco irmãos?

Resolução:

De acordo com as informações, a ordem de nascimentos (do mais velho para o mais novo) é:

Bernardo → Alice → Rodrigo → Cecília → Otávio

03) No vestibular de inverno de uma certa Universidade, João conheceu Maria, que lhe informou seu telefone. João não anotou o número, mas sabe que Maria mora numa cidade em que o número da cidade começa por 59. Lembra ainda que o 3º algarismo é 1 ou 2 e os outros quatro algarismos são 0, 3, 6, 8, mas não sabe sua ordem. Determine as possibilidades de João descobrir o telefone de Maria.

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

Resolução:

Pelas informações que João lembra, o telefone de Maria pode ser 591-(P_4) ou 592-(P_4), onde P_4 denota a permutação dos últimos quatro algarismos 0, 3, 6 e 8. Portanto, sendo N o número de possibilidades procurado e sabendo que $P_4 = 4!$, temos que:

$$N = 2 \cdot 4! \Rightarrow N = 2 \cdot 24 \Rightarrow N = 48$$

- 04) Um Senhor Feudal construiu um fosso, circundado por muros, em volta de seu castelo, com uma ponte para atravessá-lo. Em um certo dia, ele deu uma volta completa pelo muro externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa pelo muro interno. Esse trajeto foi completado em 5.320 passos. No dia seguinte, ele deu duas voltas completas no muro externo, atravessou a ponte e deu duas voltas completas no muro interno, completando esse novo trajeto em 10580 passos. Se cada passo do Senhor Feudal mede 95 cm, pode-se concluir que a largura (L), lado do fosso em metros é quanto?



Resolução:

1º trajeto: $2a + 2b + L + 2(a - 2L) + 2(b - 2L) = 5320 \Rightarrow 4a + 4b - 7L = 5320$

2º trajeto: $4a + 4b + L + 4(a - 2L) + 4(b - 2L) = 10580 \Rightarrow 8a + 8b - 15L = 10580$

$$\begin{cases} 4a + 4b - 7L = 5320 & (1) \\ 8a + 8b - 15L = 10580 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando (1) por 2 e subtraindo de (2) temos:

$$L = 60 \text{ passos}$$

Como cada passo do Senhor Feudal mede 95 cm, o lado do fosso é:

$$L = 60 \times 0,95 = 57m$$

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

05) As saladas de frutas de um restaurante são feitas misturando pelo menos duas frutas escolhidas entre: banana, laranja, maçã, abacaxi e melão. Quantos tipos diferentes de saladas de frutas podem ser feitos considerando apenas os tipos de frutas e não as quantidades?

Resolução:

A expressão “pelo menos” indica que as saladas de frutas desse restaurante são feitas misturando duas frutas ou mais dentre opções. Portanto deve-se considerar o número de possibilidades com 2, 3, 4 e 5 frutas.

Utilizando 2 frutas: $n_2 = C_{5,2} \Rightarrow n_2 = \frac{5!}{2!3!} \Rightarrow n_2 = 10$

Utilizando 3 frutas: $n_3 = C_{5,3} \Rightarrow n_3 = \frac{5!}{3!2!} \Rightarrow n_3 = 10$

Utilizando 4 frutas: $n_4 = C_{5,4} \Rightarrow n_4 = \frac{5!}{4!1!} \Rightarrow n_4 = 5$

Utilizando 5 frutas: $n_5 = 1$

Total de possibilidades: $n = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 \Rightarrow n = 26$

Portanto, podem ser feitos 26 tipos de saladas de frutas.

06) O Sr. e a Sra. Sétimo têm sete filhos, todos nascidos em 1º de abril; na verdade em seis 1º de abril consecutivos. Neste ano, para seus aniversários, a Sra. Sétimo fez um bolo com velinhas para cada um de seus filhos, sendo o número de velas em cada bolo igual ao número de anos do aniversariante. João Sétimo, o filho que mais gosta de Matemática, reparou que, nesse ano, o número total de velinhas é o dobro do que havia dois anos atrás e que há dois bolos a mais. Quantas velinhas serão acesas desta vez?

Resolução:

Como são 7 filhos que nasceram em 6 primeiro de abril consecutivos, deduzimos que 2 deles são gêmeos. As possibilidades de aniversários são:

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
 DE MATEMÁTICA

1ª)	Hoje	2 anos atrás
	1	-
	1	-
	2	-
	3	1
	4	2
	5	3
	6	4
Soma	22	10

2ª)	Hoje	2 anos atrás
	1	-
	2	-
	2	-
	3	1
	4	2
	5	3
	6	4
	23	10

3ª)	Hoje	2 anos atrás
	1	-
	2	-
	3	1
	3	1
	4	2
	5	3
	6	4
	24	11

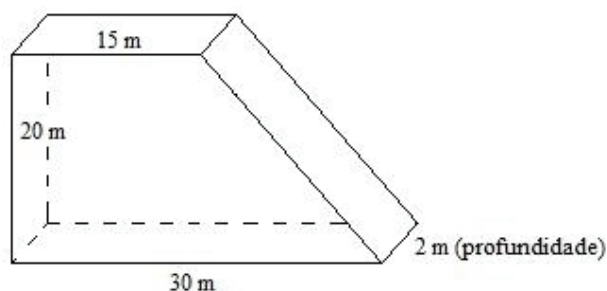
4ª)	Hoje	2 anos atrás
	1	-
	2	-
	3	1
	4	2
	4	2
	5	3
	6	4
Soma	25	12

5ª)	Hoje	2 anos atrás
	1	-
	2	-
	3	1
	4	2
	5	3
	5	3
	6	4
	26	13

6ª)	Hoje	2 anos atrás
	1	-
	2	-
	3	1
	4	2
	5	3
	6	4
	6	4
	27	14

A única possibilidade em que o número de velinhas é o dobro do que havia 2 anos atrás é a 5ª. Logo, o número de velinhas que serão acesas nesse ano é 26.

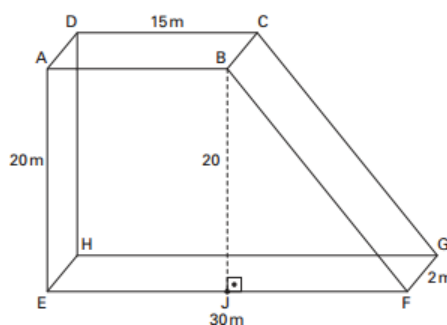
07) Considere o seguinte desenho referente às dimensões de uma piscina pública:



- a) A piscina será revestida internamente (tanto as laterais quanto o fundo) com um produto que custa R\$ 18,00 por metro quadrado. Qual é o valor total que será gasto para revestir a piscina com esse produto?

Resolução:

Sendo $EJ = 15$, temos $JF = 15$ e, no triângulo retângulo BJF , pelo teorema de Pitágoras, temos $BF = 25$. Assim, a área S , em m^2 , a ser revestida é dada por:



OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

$$S = 15 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 25 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + \frac{(30 + 15) \cdot 20}{2}$$
$$S = 630 \text{ m}^2$$

O custo do revestimento será de $C = 630 \cdot 18,00$

$C = \text{R\$ } 11.340,00$.

- b) Ao agente pagador desta obra, você recomendaria que o pagamento fosse feito à vista hoje, com 20% de desconto, ou em uma parcela única e sem desconto daqui a um mês? Considere que haja dinheiro disponível e que a quantia que não foi gasta possa vir a render 20% de juros durante o próximo mês. Justifique a resposta matematicamente.

Resolução:

Há duas formas de raciocinar chegando-se à mesma conclusão.

- (i) Considerando que o agente pagador tenha o valor total a ser pago temos que: se ele pagar à vista com desconto de 20% desembolsará $0,8 \cdot 11.340 = \text{R\$ } 9.072,00$ e poderá investir $\text{R\$ } 2.268,00$, que após um mês, com o rendimento de 20% ao mês, chegará a um saldo de $\text{R\$ } 2.721,60$. No caso do pagamento em uma parcela única no prazo de um mês, haverá um rendimento de $1,2 \cdot 11.340 = \text{R\$ } 13.608,00$ que, com o pagamento, irá gerar um saldo de $13.608 - 11.340 = \text{R\$ } 2.268,00$ ($\text{R\$ } 453,60$ a menos). Comparando os saldos obtidos nos dois casos, recomenda-se ao agente pagador o pagamento à vista.
- (ii) Considerando que o agente pagador tenha o valor para pagamento à vista com 20% de desconto, isto é, $0,8 \cdot 11.340 = \text{R\$ } 9.072,00$. Se não o gastasse, aplicando-o a 20% de juros ao mês, após um mês teria $1,2 \cdot 9.072,00 = \text{R\$ } 10.886,40$, valor insuficiente para pagar o custo de $\text{R\$ } 11.340,00$ (faltariam $\text{R\$ } 453,60$). Portanto, recomenda-se ao agente pagador o pagamento à vista.

- c) Decidiu-se construir uma canaleta para desviar água de um reservatório e assim encher a piscina. Se a vazão da água nessa canaleta é igual a 2 metros cúbicos por minuto, quanto tempo levará até que a piscina fique cheia?

Resolução:

O volume V da piscina, em m^3 , é dado por $V = \left[\frac{(30+15) \cdot 20}{2} \right] \cdot 2 \Rightarrow V = 900 \text{ m}^3$.

Assim, o tempo T necessário para enchê-la é $T = \frac{900}{2} = 450 \text{ min}$, ou seja, $T = 7,5 \text{ horas}$.

- 08) Um comerciante compra uma caixa de vinho estrangeiro por $\text{R\$ } 1.000,00$ e vende pelo mesmo preço, depois de retirar 4 garrafas e aumentar o preço da dúzia em $\text{R\$ } 100,00$. Então, qual é o número original de garrafas de vinho na caixa?

OLIMPIADA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

Resolução:

Seja x a quantidade de garrafas.

Temos:

$$(x - 4) \times \left(\frac{1000}{x} + \frac{100}{12} \right) = 1000$$

Desenvolvendo a igualdade, chegamos à seguinte equação do 2º grau:

$$x^2 - 4x - 480 = 0$$

As soluções para a equação são 24 e -20. Como não pode existir uma quantidade negativa, chegamos à conclusão que o número original de garrafas de vinho na caixa é 24.

09) Feita uma pesquisa entre 100 alunos do ensino médio, acerca das disciplinas português, geografia e história, constatou-se que 65 gostam de português, 60 gostam de geografia, 50 gostam de história, 35 gostam de português e geografia, 30 gostam de geografia e história, 20 gostam de história e português e 10 gostam dessas três disciplinas. Determine:

- a) O número de alunos que não gosta de nenhuma dessas disciplinas.
- b) O número de alunos que gostam apenas de história.

Resolução:

Para obter os dados exclusivos de cada conjunto é preciso excluir as interseções. Usando o Diagrama de Venn obtemos:

Gostam das três disciplinas = 10

Gostam somente de P e G = $35 - 10 = 25$

Gostam somente de G e H = $30 - 10 = 20$

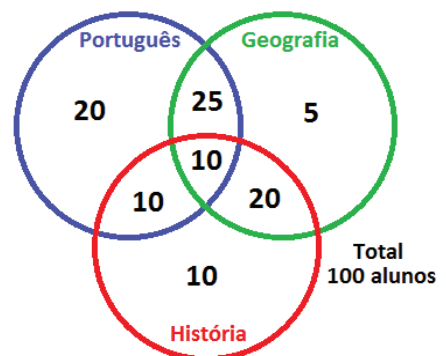
Gostam somente de P e H = $20 - 10 = 10$

Gostam somente de P = $65 - 25 - 10 - 10 = 20$

Gostam somente de G = $60 - 25 - 20 - 10 = 5$

Gostam somente de H = $50 - 20 - 10 - 10 = 10$

Total que gosta de pelo menos uma disciplina = 100



- a) Não há nenhum aluno que não gosta de pelo menos uma disciplina.
- b) Dez alunos gostam apenas de história.

OLIMPIÁDA ESTUDANTIL
ASTRA
DE MATEMÁTICA

10) Uma pessoa vai comprar um presente e leva R\$1.200,00. Quando lhe perguntam quanto custou o presente ela disse:

"Sobrou troco, mas não direi nem o troco nem o preço do presente. Digo apenas que o preço do presente, sendo lido ao contrário é o valor de 9 presentes."

Quanto custou o presente?

Dada à condição, temos que o preço do presente deve ser menor que R\$ 1200,00, começar com o algarismo 1 e terminar com o algarismo 9. Vamos testar as possibilidades de números com 2, 3 e 4 algarismos.

19	109	119		1009	1019		1089
<u>x 9</u>	<u>x 9</u>	<u>x 9</u>	...	<u>x 9</u>	<u>x 9</u>	...	<u>x 9</u>
171	981	1071		9081	9171		9801

Através das possibilidades, concluímos que o preço do presente é R\$ 1.089,00.